Р. К. Гордин

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

Планиметрия

7–9 классы

Учебное пособие

Москва
Издательство МЦНМО
2010

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721
Г68

Гордин Р. К.

Г68 Сборник задач по геометрии. Планиметрия. 7–9 классы. — М.: МЦНМО, 2010. — 176 с.: ил.

ISBN 978-5-94057-601-3

Книга содержит задачи различной сложности по основным темам школьного курса планиметрии (7–9 классы).

По каждой теме приводятся основные теоретические факты, ключевые задачи, подробные решения наиболее важных задач, задачи на отработку учебных навыков, для углубленного изучения геометрии и олимпиадные задачи.

Книга является дополнительным пособием к действующим учебникам по геометрии и может использоваться как в общеобразовательных, так и в физико-математических школах.

ББК 22.151я721

Учебное издание

Гордин Рафаил Калманович

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ. ПЛАНИМЕТРИЯ. 7–9 КЛАССЫ

Подписано в печать 25.02.2010 г. Формат 60×90 $^1/_{16}$. Печ. л. 11. Тираж 200 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

ISBN 978-5-94057-601-3

Предисловие

Настоящий сборник задач по геометрии является стереотипным изданием сборника «Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы», 4-е издание которого вышло в издательстве МЦНМО в 2008 году; единственное отличие данного сборника от книги «Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы» состоит в том, что из настоящего издания исключены все решения и ответы к задачам, за исключением примеров, разобранных в тексте параграфов. Это дает возможность учителям более широко использовать пособие в качестве источника задач для самостоятельного решения школьниками. Книга может быть эффективно использована учителем для работы на уроках и на занятиях математического кружка.

Настоящий сборник является дополнительным материалом к действующим школьным учебникам. Всего в сборнике более 1250 задач, которые распределены по трем уровням сложности. Задачи каждого уровня не требуют знаний, выходящих за рамки школьной программы. В то же время, если для решения задач первого уровня достаточно добротного знания материала учебника, то задачи второго и тем более третьего уровня подразумевают повышенный интерес к геометрии и более глубокое владение умениями и навыками, полученными на уроках. Задачи второго уровня рассчитаны на наиболее сильных учеников обычного класса и на учеников классов с углубленным изучением математики. Задачи третьего уровня довольно трудны. Большинство из них в разное время предлагалось на различных математических олимпиадах. Есть среди них и известные, ставшие классическими, задачи элементарной геометрии, а также наиболее красивые задачи вступительных экзаменов в вузы.

В начале каждого параграфа приведены основные факты, необходимые для решения содержащихся в нем задач. Приводятся также примеры типичных задач с решениями.

Ключевые задачи отмечены «ноликом» (например, **1.13⁰**). Как правило, утверждения, содержащиеся в таких задачах, являются основой для решения целых циклов содержательных задач школьной геометрии.

При подборе задач использована компьютерная информационно-поисковая система «Задачи» (http://zadachi.mccme.ru), созданная под руководством И. Ф. Шарыгина в Московском центре непрерывного математического образования.

Задачи сборника в течение многих лет использовались на уроках геометрии в московской школе №57.

Выражаю искреннюю благодарность Л. Д. Альтшулеру, А. Буфетову, Б. П. Гейдману, А. А. Суханову, И. Ф. Шарыгину, А. Шеню, оказавшим мне большую помощь советами и замечаниями при подготовке сборника к публикации.

Р. К. Гордин

Раздел первый
7 класс

§ 1.1. Измерение отрезков и углов

Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Каждый отрезок имеет определенную длину, бóльшую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

На любом луче от его начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, притом только один.

Каждый угол имеет определенную градусную меру, бóльшую нуля. Развернутый угол равен 180°. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

От любого луча в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, притом только один.

Пример 1. Точки M, A и B расположены на одной прямой, причем отрезок AM вдвое больше отрезка BM. Найдите AM, если $AB = 6$.

Решение. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими. Если точка M лежит между точками A и B (рис. 1, a), то $AM = \frac{2}{3}AB = 4$. Если точка B лежит

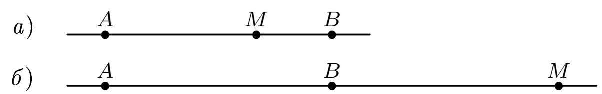

Рис. 1

между точками A и M (рис. 1, *б*), то B — середина AM, поэтому $AM = 2AB = 12$. Точка A не может лежать между точками B и M, так как в этом случае отрезок AM меньше отрезка BM.

Пример 2. Точка C — середина отрезка AB. На отрезках AC и BC взяты соответственно точки M и N, причем $AM : MC = CN : NB$. Докажите, что отрезок MN равен половине отрезка AB.

Решение. Из равенства $AM : MC = CN : NB$ следует равенство $AM : AC = CN : CB$. Обозначим $AM : AC = CN : CB = k$, $AC = CB = a$ (рис. 2). Тогда $AM = kAC = ka$, $MC = AC - AM = a - ka$, $CN = kCB = ka$. Следовательно,

$$MN = MC + CN = a - ka + ka = a = \frac{1}{2}AB.$$

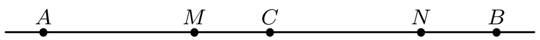

Рис. 2

Пример 3. Один из углов, образованных пересекающимися прямыми a и b, равен 15°. Прямая a_1 симметрична прямой a относительно прямой b, а прямая b_1 симметрична прямой b относительно a. Найдите углы, образованные прямыми a_1 и b_1.

Решение. Возьмем на прямых a и b, пересекающихся в точке O, соответственно точки A и B, отличные от O (рис. 3). Пусть $\angle AOB = 15^\circ$. Точка A_1, симметричная точке A относительно прямой b, лежит на прямой a_1, причем $\angle A_1OB = \angle AOB = 15^\circ$. Точка B_1, симметричная точке B относительно прямой a, лежит на прямой b_1, причем $\angle B_1OA = \angle BOA = 15^\circ$. Так как луч OB лежит между лучами OA_1 и OA, а луч OA — между OB и OB_1, то $\angle A_1OB_1 = \angle A_1OB + \angle AOB + \angle AOB_1 = 15^\circ + 15^\circ + 15^\circ = 45^\circ$. Следовательно, при пересечении прямых a_1 и b_1 образуются углы, равные 45°, 45°, 135°, 135°.

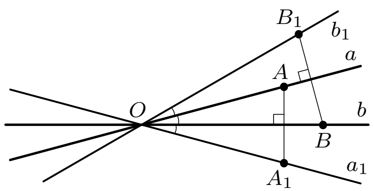

Рис. 3

Задачи первого уровня

1.1. На прямой последовательно откладываются точки A, B, C и D, причем $AB = BC = CD = 6$. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и CD.

1.2. На прямой последовательно откладываются точки A, B, C, D, E и F, причем $AB = BC = CD = DE = EF$. Найдите отношения $AD : DF$, $AC : AF$, $BD : CF$.

1.3. Точка M — середина отрезка AB, а точка N — середина отрезка MB. Найдите отношения $AM : MN$, $BN : AM$ и $MN : AB$.

1.4. Точка K отрезка AB, равного 12, расположена на 5 ближе к A, чем к B. Найдите AK и BK.

1.5. Точка M расположена на отрезке AN, а точка N — на отрезке BM. Известно, что $AB = 18$ и $AM : MN : NB = 1 : 2 : 3$. Найдите MN.

1.6. На прямой выбраны три точки A, B и C, причем $AB = 1$, $BC = 3$. Чему может быть равно AC? Укажите все возможные варианты.

1.7. На прямой выбраны четыре точки A, B, C и D, причем $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 4$. Чему может быть равно AD? Укажите все возможные варианты.

1.8. На линейке отмечены три деления: 0, 2 и 5. Как отложить с ее помощью отрезок длиной 9?

1.9. На линейке отмечены три деления: 0, 7 и 11. Как отложить с ее помощью отрезок длиной: а) 8; б) 5?

1.10. На прямой взяты точки A, O и B. Точки A_1 и B_1 симметричны соответственно точкам A и B относительно точки O. Найдите A_1B, если $AB_1 = 2$.

1.11. Точка B лежит на отрезке AC длиной 5. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и BC.

1.12. Точки A, B, C последовательно расположены на одной прямой и $AB : BC = 3 : 4$. Найдите отношения $AB : AC$ и $BC : AB$.

1.13^0. Точки A, B, C расположены на одной прямой и $AC : BC = 2 : 5$. Найдите отношения $AC : AB$ и $BC : AB$.

1.14^0. Точки A, B, C расположены на одной прямой и

$AC : BC = m : n$ (m и n — натуральные числа). Найдите отношения $AC : AB$ и $BC : AB$.

1.15⁰. Точка B делит отрезок AC в отношении $AB : BC = 2 : 1$. Точка D делит отрезок AB в отношении $AD : DB = 3 : 2$. В каком отношении точка D делит отрезок AC?

1.16. Даны точки A и B. Где на прямой AB расположены точки, расстояние от которых до точки A больше, чем до точки B?

1.17. Один из двух смежных углов на 30° больше другого. Найдите эти углы.

1.18. Один из двух смежных углов в 3 раза меньше другого. Найдите эти углы.

1.19⁰. Докажите, что биссектрисы двух смежных углов перпендикулярны.

1.20. Докажите, что биссектрисы двух вертикальных углов лежат на одной прямой.

1.21. Луч света, исходящий из точки M, зеркально отразившись от прямой AB в точке C, попал в точку N. Докажите, что биссектриса угла MCN перпендикулярна прямой AB. (Угол падения равен углу отражения.)

1.22. Точка M лежит внутри угла AOB, OC — биссектриса этого угла. Докажите, что угол MOC равен полуразности углов AOM и BOM.

1.23. Точка M лежит вне угла AOB, OC — биссектриса этого угла. Докажите, что угол MOC равен полусумме углов AOM и BOM.

1.24. Из точки на листе бумаги провели четыре луча, делящих плоскость на четыре угла. Затем лист разрезали по биссектрисам этих углов на четыре части (которые также являются углами). Докажите, что два из этих углов образуют в сумме 180°, и два других — тоже.

Задачи второго уровня

1.25. Даны точки A и B. Где на прямой AB расположены точки, расстояние от которых до точки A: а) вдвое больше, чем до точки B; б) втрое меньше, чем до точки B?

1.26. Даны точки A и B. Для каждой точки M, не совпадающей с точкой B и лежащей на прямой AB, рассмотрим отношение $AM : BM$. Где расположены точки, для которых это отношение: а) больше 2; б) меньше 2?

1.27. Имеется угольник с углом в 70°. Как построить с его помощью угол в 40°?

1.28. Имеется угольник с углом в 19°. Как построить с его помощью угол в 1°?

1.29. Через точку на плоскости провели 10 прямых, после чего плоскость разрезали по этим прямым на углы. Докажите, что хотя бы один из этих углов меньше 20°.

1.30. а) На сколько градусов поворачивается за минуту минутная стрелка? Часовая стрелка?

б) Какой угол образуют минутная и часовая стрелка в 3 часа 5 минут?

в) В полдень минутная и часовая стрелка совпали. Когда они совпадут в следующий раз?

г) Сколько раз в течение суток часовая и минутная стрелки совпадают? Образуют развернутый угол? Образуют прямой угол?

Задачи третьего уровня

1.31. В деревне у прямой дороги стоят четыре избы A, B, C и D на расстоянии 50 метров друг от друга. В какой точке дороги надо построить колодец, чтобы сумма расстояний от колодца до всех четырех изб была бы наименьшей?

1.32. В деревне A живет 50 школьников, в деревне B живет 100 школьников. Расстояние между деревнями 3 километра. В какой точке дороги из A в B надо построить школу, чтобы суммарное расстояние, проходимое всеми школьниками, было как можно меньше?

§ 1.2. Признаки равенства треугольников

Первый признак равенства треугольников. *Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответ-*

ственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.

Второй признак равенства треугольников. *Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам второго треугольника, то треугольники равны.*

Третий признак равенства треугольников. *Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого, то треугольники равны.*

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую сторону.

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину этого угла с точкой на противолежащей стороне.

Треугольник называется *равнобедренным*, если у него две стороны равны. Эти стороны называются *боковыми сторонами.* Третья сторона называется *основанием.*

Треугольник называется *равносторонним* (*правильным*), если все его стороны равны.

Свойства равнобедренного треугольника.

1^0. *Углы при основании равнобедренного треугольника равны.*

2^0. *Медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является его биссектрисой и высотой.*

Признак равнобедренного треугольника. *Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.*

Пример 1. На сторонах BC и B_1C_1 равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ взяты соответственно точки M и M_1, причем $BM : MC = B_1M_1 : M_1C_1$. Докажите, что $AM = A_1M_1$.

Решение. Из равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ следует, что $\angle B = \angle B_1$ и $AB = A_1B_1$ (рис. 4). Отрезки BM и

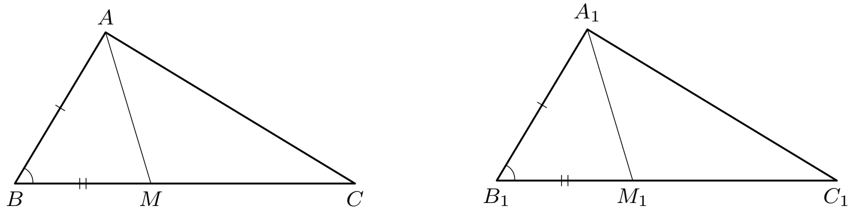

Рис. 4

B_1M_1 составляют одну и ту же часть соответственно от отрезков BC и B_1C_1, поэтому они равны. Тогда треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AM = A_1M_1$.

Пример 2. Постройте[1] равнобедренный треугольник, если даны прямая, на которой лежит медиана, проведенная из вершины, две точки на боковых сторонах и точка на основании.

Решение. Предположим, что искомый равнобедренный треугольник ABC построен (рис. 5). Данные точки M и N лежат на его боковых сторонах AB и AC соответственно, данная точка K — на основании BC, медиана AL — на данной прямой l. Поскольку медиана AL равнобедренного треугольника ABC является также его биссектрисой, а биссектриса есть ось симметрии угла, то точка M_1, симметричная точке M относительно прямой l, лежит на боковой стороне AC. В то же время, медиана AL является также высотой равнобедренного треугольника ABC. Поэтому точка K лежит на прямой, перпендикулярной данной прямой l.

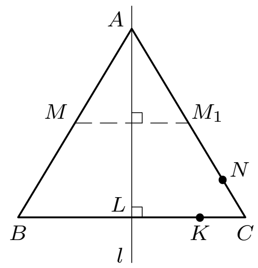

Рис. 5

Отсюда вытекает следующее построение. Строим точку M_1, симметричную данной точке M относительно данной прямой l. Если точка M_1 отлична от данной точки N и прямая M_1N пересекает данную прямую l, задача имеет единственное решение.

[1] Если специально не оговаривается набор инструментов, то задача на построение подразумевает использование циркуля и линейки.

В этом случае прямая M_1N содержит одну из боковых сторон искомого треугольника, а прямая, симметричная ей относительно данной прямой l, — вторую. Основание искомого треугольника получим, проведя через данную точку K прямую, перпендикулярную прямой l. Если прямая M_1N параллельна l, то задача не имеет решений. Если же точка M_1 совпадет с N, задача имеет бесконечно много решений.

Пример 3. Постройте треугольник ABC, если известны сторона AC, острый угол при вершине A и разность сторон AB и BC ($AB > BC$).

Решение. Предположим, что искомый треугольник ABC построен (рис. 6). Пусть $\angle A = \alpha$ — данный угол, $AC = a$ — данная сторона, $AB - BC = b$ — данная разность двух других сторон. На стороне AB отложим отрезок BC_1, равный BC. Тогда

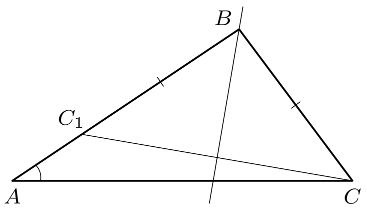

Рис. 6

$$AC_1 = AB - BC_1 = AB - BC = b,$$

а точка B лежит на серединном перпендикуляре к отрезку CC_1. Отсюда вытекает следующее построение. Строим треугольник ACC_1 по двум сторонам $AC = a$, $AC_1 = b$ и углу между ними: $\angle CAC = \alpha$. Проводим серединный перпендикуляр к отрезку AC_1. Он пересекает луч AC_1 в искомой вершине B. Задача имеет единственное решение.

Задачи первого уровня

1.33. Медиана треугольника делит его на два треугольника, периметры которых равны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

1.34. Докажите, что в равных треугольниках соответствующие медианы равны.

1.35. Докажите, что в равных треугольниках соответствующие биссектрисы равны.

1.36. На сторонах вертикальных углов отложены от его вершины равные отрезки OA, OB, OC и OD. Укажите пары равных треугольников с вершинами в точках O, A, B, C и D.

1.37⁰. Докажите, что биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины, является также медианой и высотой.

1.38⁰. Медиана треугольника является также его высотой. Докажите, что такой треугольник равнобедренный.

1.39. Биссектриса треугольника является его высотой. Докажите, что треугольник равнобедренный.

1.40. Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BK. Найдите AB, если $BC = 12$.

1.41. Прямая, проведенная через вершину A треугольника ABC перпендикулярно его медиане BD, делит эту медиану пополам. Найдите отношение сторон AB и AC.

1.42. Стороны равностороннего треугольника делятся точками K, L, M в одном и том же отношении (считая по часовой стрелке). Докажите, что треугольник KLM также равносторонний.

1.43⁰. Постройте треугольник по трем сторонам. Всегда ли это можно сделать?

1.44⁰. Постройте угол, равный данному.

1.45⁰. Постройте треугольник:

а) по двум сторонам и углу между ними;

б) по стороне и двум прилежащим к ней углам.

1.46⁰. В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M на расстояние, равное AM. Найдите расстояние от полученной точки до вершин B и C, если $AB = c$, $AC = b$.

1.47⁰. Биссектриса треугольника является его медианой. Докажите, что треугольник равнобедренный.

1.48. Равны ли треугольники:

а) по двум сторонам и углу;

б) по стороне и двум углам?

1.49⁰. Докажите признаки равенства прямоугольных треугольников:

а) по двум катетам;

б) по катету и гипотенузе;

в) по катету и прилежащему острому углу;

г) по гипотенузе и острому углу.

1.50. Постройте треугольник:

а) по двум сторонам и высоте, проведенным из одной вершины;

б) по стороне и высотам, проведенным к двум другим сторонам;

в) по углу, высоте и биссектрисе, проведенным из вершины этого угла;

г) по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и высоте, опущенной на другую сторону.

1.51⁰. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку есть геометрическое место точек, равноудаленных от концов этого отрезка.

1.52. Две различные окружности пересекаются в точках A и B. Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, делит отрезок AB пополам и перпендикулярна ему.

1.53. Разделите отрезок пополам с помощью циркуля и линейки.

Задачи второго уровня

1.54. Докажите признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему углу.

1.55. Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Периметр треугольника ABC равен периметру треугольника ABD, а периметр треугольника ACD — периметру треугольника BCD. Докажите, что $AO = BO$.

1.56. Докажите равенство треугольников:

а) по двум сторонам и медиане, выходящим из одной вершины;

б) по медиане и двум углам, на которые разбивает эта медиана угол треугольника.

1.57. Докажите, что в равных треугольниках соответствующие высоты равны между собой.

1.58. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку является его осью симметрии.

1.59. Докажите, что диагонали четырехугольника с равными сторонами взаимно перпендикулярны.

1.60. Точки M и N — середины равных сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку MN проходит через точку P.

1.61. Две высоты треугольника равны между собой. Докажите, что треугольник равнобедренный.

1.62. Высоты треугольника ABC, проведенные из вершин B и C, пересекаются в точке M. Известно, что $BM = CM$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

1.63⁰. Найдите геометрическое место внутренних точек угла, равноудаленных от его сторон.

1.64. Докажите, что биссектриса угла является его осью симметрии.

1.65. Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC, пересекающие прямые CB и BA в точках K и M соответственно. Найдите AB, если $BM = 8$, $KC = 1$.

1.66. Через данную точку проведите прямую, пересекающую две данные прямые под равными углами.

1.67. Дана прямая l и точки A и B по разные стороны от нее. Постройте на прямой l такую точку C, чтобы прямая l делила угол ACB пополам.

1.68. Дана прямая l и точки A и B по одну сторону от нее. Луч света, выпущенный из точки A, отразившись от этой прямой в точке C, попадает в точку B. Постройте точку C. (Угол падения равен углу отражения.)

1.69. Внутри острого угла даны точки M и N. Как из точки M направить луч света, чтобы он, отразившись последовательно от сторон угла, попал в точку N?

1.70. Постройте равнобедренный треугольник, если даны две прямые, на которых лежат биссектрисы его углов при вершине и при основании, и по точке на каждой из боковых сторон.

1.71⁰. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

1.72. Биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M, биссектрисы B_1B_2 и C_1C_2 треугольника AB_1C_1 пересекаются в точке N. Докажите, что точки A, M и N лежат на одной прямой.

1.73. Постройте биссектрису угла, вершина которого недоступна.

1.74⁰. Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

1.75. Докажите, что около любого треугольника можно описать окружность, притом единственную.

1.76. Докажите, что две различные окружности не могут иметь более двух общих точек.

1.77. Постройте треугольник, если известны сторона, прилежащий к ней угол и сумма двух других сторон.

1.78. Постройте треугольник по двум сторонам и разности противолежащих им углов.

1.79. Постройте треугольник, если дана одна его вершина и две прямые, на которых лежат биссектрисы, проведенные из двух других вершин.

Задачи третьего уровня

1.80. Из точки вне прямой опустите перпендикуляр на эту прямую с помощью циркуля и линейки, проведя не более трех линий.

1.81⁰. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей.

1.82. На сторонах AB, BC и CA остроугольного треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что если $\angle B_1A_1C = \angle BA_1C_1$, $\angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1$, $\angle A_1C_1B = \angle AC_1B_1$, то точки A_1, B_1 и C_1 являются основаниями высот треугольника ABC.

1.83. Докажите, что, если в треугольнике один угол равен 120°, то треугольник, образованный основаниями его биссектрис, прямоугольный.

§ 1.3. Параллельность. Сумма углов треугольника

Две прямые называются *параллельными*, если они не имеют ни одной общей точки.

Аксиома параллельных. *Через точку, не лежащую на прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.*

Признак параллельности прямых. *Если при пересечении двух прямых третьей внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.*

Свойство параллельных прямых. *Если две параллельные прямые пересечь третьей, то при этом образуются равные внутренние накрест лежащие углы.*

Теорема об углах треугольника. *Сумма внутренних углов треугольника равна* 180°.

Теорема о внешнем угле треугольника. *Внешний угол треугольника равен сумме двух не смежных с ним внутренних углов.*

Пример 1. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Докажите, что $AC \parallel BD$ и $AD \parallel BC$.

Решение. Треугольники AOC и BOD (рис. 7) равны по двум сторонам и углу между ними ($AO = BO$ и $CO = DO$ по условию, а углы AOC и BOD равны как вертикальные), поэтому $\angle OAC = \angle OBD$. Прямая AB пересекает прямые AC и BD, причем накрест лежащие углы OAC и OBD равны, следовательно, прямые AC и BD параллельны. Аналогично, $AD \parallel BC$.

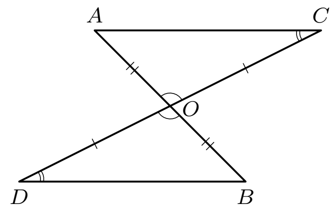

Рис. 7

Пример 2. Две параллельные прямые пересечены третьей. Найдите угол между биссектрисами внутренних односторонних углов.

Решение. Пусть прямые l и m параллельны, а третья прямая пересекает их соответственно в точках A и B (рис. 8). Возьмем на прямой l точку C, а на прямой m — точку D так, чтобы эти точки лежали по одну сторону от прямой AB. Тогда углы BAC и ABD — внутренние односторонние. По свойству

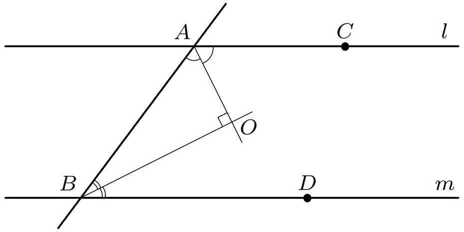

Рис. 8

параллельных прямых $\angle BAC + \angle ABD = 180°$. Пусть биссектрисы этих углов пересекаются в точке O. Тогда

$$\angle OAB + \angle OBA = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABD = \\ = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABD) = \frac{180°}{2} = 90°.$$

Следовательно, по теореме о сумме углов треугольника

$$\angle AOB = 180° - (\angle OAB + \angle OBA) = 180° - 90° = 90°.$$

Пример 3. Докажите, что угол между высотой и биссектрисой, проведенными из одной вершины треугольника, равен полуразности двух других его углов.

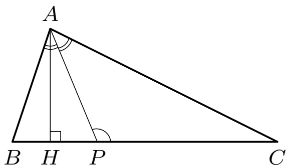

Рис. 9

Решение. Пусть AH и AP — соответственно высота и биссектриса треугольника ABC (рис. 9). Обозначим $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Если $\beta = \gamma$, то утверждение очевидно. Предположим, что $\beta > \gamma$. Тогда APC — внешний угол треугольников AHP и ABP, поэтому

$$\angle HAP = \angle APC - \angle AHC = \angle ABP + \angle BAP - \angle AHC = \\ = \beta + \frac{180° - \beta - \gamma}{2} - 90° = \frac{\beta - \gamma}{2}.$$

Если $\beta < \gamma$, то аналогично докажем, что $\angle HAP = \frac{\gamma - \beta}{2}$.

Пример 4. Постройте прямоугольный треугольник по острому углу и сумме катетов.

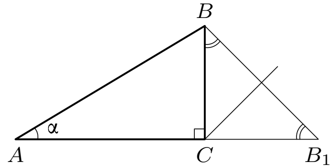

Рис. 10

Решение. Предположим, что искомый прямоугольный треугольник ABC построен (рис. 10). Пусть $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$ — данный угол, $AC + CB = a$ — данная сумма катетов. На продолжении катета AC за точку C отложим отрезок CB_1, равный BC. Тогда

$$AB_1 = AC + CB_1 = AC + BC = a, \qquad \angle AB_1B = 45°,$$

а точка C лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BB_1. Отсюда вытекает следующее построение. Треугольник ABB_1 строим по стороне $AB_1 = a$ и двум прилежащим к ней углам: $\angle A = \alpha$, $\angle B_1 = 45°$. Проводим серединный перпендикуляр к стороне BB_1. Он пересекает отрезок AB_1 в искомой вершине C.

Задачи первого уровня

1.84^{0}. Через точку, не лежащую на данной прямой, проведите прямую, параллельную данной.

1.85^{0}. Докажите, что две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.

1.86. Докажите, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую.

1.87. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Докажите, что $AC \parallel BD$ и $AD \parallel BC$.

1.88. Точки A и D лежат на одной из двух параллельных прямых, точки B и C — на другой, причем прямые AB и CD также параллельны. Докажите, что противоположные углы четырехугольника $ABCD$ равны между собой.

1.89. Через вершину B треугольника ABC проведена прямая, параллельная прямой AC. Образовавшиеся при этом три угла с вершиной B относятся как 3 : 10 : 5. Найдите углы треугольника ABC.

1.90. Через середину M отрезка с концами на двух параллельных прямых проведена прямая, пересекающая эти прямые в точках A и B. Докажите, что M также середина AB.

1.91. Внешние углы треугольника ABC при вершинах A и C

равны 115° и 140°. Прямая, параллельная прямой AC, пересекает стороны AB и AC в точках M и N. Найдите углы треугольника BMN.

1.92. Через точку M, лежащую внутри угла с вершиной A, проведены прямые, параллельные сторонам угла и пересекающие эти стороны в точках B и C. Известно, что $\angle ACB = 50^\circ$, а угол, смежный с углом ACM, равен 40°. Найдите углы треугольников BCM и ABC.

1.93. Расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Докажите, что расстояние от каждой точки одной из двух параллельных прямых до второй прямой постоянно.

1.94^0. Найдите геометрическое место точек, удаленных от данной прямой на данное расстояние.

1.95. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на одну из них.

1.96. AD — биссектриса треугольника ABC. Точка M лежит на стороне AB, причем $AM = MD$. Докажите, что $MD \parallel AC$.

1.97. Точки A и D лежат на одной из двух параллельных прямых, точки B и C — на другой, причем прямые AB и CD также параллельны. Докажите, что $AB = CD$ и $AD = BC$.

1.98. Углы треугольника относятся как $2 : 3 : 4$. Найдите отношение внешних углов треугольника.

1.99. Докажите, что прямая, проходящая через середины боковых сторон равнобедренного треугольника, параллельна основанию.

1.100. Две параллельные прямые пересечены третьей. Найдите угол между биссектрисами внутренних односторонних углов.

1.101. Прямая пересекает параллельные прямые a и b в точках A и B соответственно. Биссектриса одного из образовавшихся углов с вершиной B пересекает прямую a в точке C. Найдите AC, если $AB = 1$.

1.102. Докажите, что высота равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, вдвое меньше гипотенузы.

1.103. Угол треугольника равен сумме двух других его углов. Докажите, что треугольник прямоугольный.

1.104. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC, причем $\angle ABM = \angle ACB$ и $\angle CBN = \angle BAC$. Докажите, что треугольник BMN равнобедренный.

1.105. Угол при основании BC равнобедренного треугольника ABC вдвое больше угла при вершине A, BD — биссектриса треугольника. Докажите, что $AD = BC$.

1.106. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке M. При этом $BM = AB$, $\angle BAM = 35^\circ$, $\angle CAM = 15^\circ$. Найдите углы треугольника ABC.

1.107. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N, причем $MN \parallel AB$ и $MN = AM$. Найдите угол BAN, если $\angle B = 45^\circ$ и $\angle C = 60^\circ$.

1.108. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке M, причем $BM = AB$. Найдите разность углов BAM и CAM, если $\angle ACB = 25^\circ$.

1.109. Треугольник ABC — равнобедренный $(AB = BC)$. Отрезок AM делит его на два равнобедренных треугольника с основаниями AB и MC. Найдите угол B.

Задачи второго уровня

1.110. Прямая пересекает боковую сторону AC, основание BC и продолжение боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC за точку B в точках K, L и M соответственно. При этом треугольники CKL и BML получаются также равнобедренными. Найдите их углы.

1.111. Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся ею в отношении $AO : OB = CO : OD = 1 : 2$. Прямые AD и BC пересекаются в точке M. Докажите, что треугольник DMB равнобедренный.

1.112. BK — биссектриса треугольника ABC. Известно, что $\angle AKB : \angle CKB = 4 : 5$. Найдите разность углов A и C треугольника ABC.

1.113. Два угла треугольника равны 10° и 70°. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины третьего угла треугольника.

1.114. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию. Верно ли обратное?

1.115. Биссектрисы двух углов треугольника пересекаются под углом 110°. Найдите третий угол треугольника.

1.116⁰. Один из углов треугольника равен α. Найдите угол между биссектрисами двух других углов.

1.117⁰. Один из углов треугольника равен α. Найдите угол между высотами, проведенными из вершин двух других углов.

1.118. Высоты остроугольного треугольника ABC, проведенные из вершин A и B, пересекаются в точке H, причем $\angle AHB = 120^\circ$, а биссектрисы, проведенные из вершин B и C, — в точке K, причем $\angle BKC = 130^\circ$. Найдите угол ABC.

1.119. Существует ли треугольник, две биссектрисы которого перпендикулярны?

1.120⁰. Докажите, что в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

1.121⁰. Катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы. Докажите, что угол, противолежащий этому катету, равен 30°.

1.122. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30°, а гипотенуза равна 8. Найдите отрезки, на которые делит гипотенузу высота, проведенная из вершины прямого угла.

1.123. Угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC равен 108°. Перпендикуляр к биссектрисе AD этого треугольника, проходящий через точку D, пересекает сторону AC в точке E. Докажите, что $DE = BD$.

1.124. Докажите, что биссектрисы равностороннего треугольника делятся точкой пересечения в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника.

1.125. В треугольнике ABC угол A равен 60°, а биссектриса угла A, медиана, проведенная из вершины B, и высота, проведенная из вершины C, пересекаются в одной точке. Найдите остальные углы треугольника.

1.126. Дана незамкнутая ломаная $ABCD$, причем $AB = CD$ и $\angle ABC = \angle BCD$. Докажите, что $AD \parallel BC$.

1.127. Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке K. Известно, что $AC \parallel BD$. Докажите, что треугольники AKC и BKD равнобедренные.

1.128⁰. Медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена. Докажите, что треугольник прямоугольный.

1.129. Постройте прямоугольный треугольник по катету и медиане, проведенной из вершины прямого угла.

1.130. На стороне AB квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник ABM. Найдите угол DMC.

1.131. На сторонах AC и BC равностороннего треугольника ABC построены внешним образом равнобедренные прямоугольные треугольники ACN и BCM с прямыми углами при вершинах A и C соответственно. Докажите, что $BM \perp BN$.

1.132. Биссектриса внутреннего угла при вершине A и биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите $\angle BMC$, если $\angle BAC = 40^\circ$.

1.133⁰. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

1.134. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, проведенной к гипотенузе.

1.135. Кошка сидит на середине лестницы, прислоненной к стене. Концы лестницы начинают скользить по стене и полу. Какова траектория движения кошки?

1.136. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30°. Докажите, что высота и медиана, проведенные из вершины прямого угла, делят его на три равные части.

1.137. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°. Докажите, что в этом треугольнике отрезок перпендикуляра, проведенного к гипотенузе через ее середину до пересечения с катетом, втрое меньше большего катета.

1.138. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1, один из острых углов равен 15°. Найдите гипотенузу.

1.139. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1 и высоты AA_2, BB_2, CC_2. Докажите, что длина ломаной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$ равна периметру треугольника ABC.

1.140. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $CBFK$ (вершины обоих квадратов перечислены против часовой стрелки). Из точек E и F на прямую AB опущены перпендикуляры EM и FN. Докажите, что $EM + FN = AB$.

1.141. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $CBFK$ (вершины обоих квадратов перечислены против часовой стрелки), P — середина KD. Докажите, что $CP \perp AB$.

1.142. Даны точки A и B. Пользуясь только циркулем, удвойте отрезок AB, т. е. постройте такую точку C, чтобы точки A, B и C лежали на одной прямой и $AC = 2BC$.

1.143. Какие значения может принимать: а) наибольший угол треугольника; б) наименьший угол треугольника; в) средний по величине угол треугольника?

1.144^0. Найдите сумму внутренних углов: а) четырехугольника; б) выпуклого пятиугольника; в) выпуклого n-угольника.

1.145. Найдите сумму пяти углов при вершинах пятиконечной звезды (рис. 11).

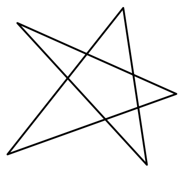

Рис. 11

1.146. Докажите, что в каждом девятиугольнике есть пара диагоналей, угол между которыми меньше $7°$.

1.147. Найдите сумму внешних углов при вершинах выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине.

1.148. На продолжениях гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC за точки A и B соответственно взяты точки K и M, причем $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите угол MCK.

1.149. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки K и M, причем $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите угол MCK.

1.150. На одной из сторон данного острого угла лежит точка A. Постройте на этой же стороне угла точку, равноудаленную от второй стороны угла и от точки A.

1.151^0. Постройте треугольник, если заданы сторона, противолежащий ей угол и сумма двух других сторон.

1.152. Постройте треугольник по периметру и двум углам.

1.153. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BCK и DCL. Докажите, что треугольник AKL правильный.

1.154. На каждой стороне правильного треугольника взято по точке. Стороны треугольника с вершинами в этих точках перпендикулярны сторонам исходного треугольника. В каком отношении каждая из взятых точек делит сторону исходного треугольника?

1.155. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, точка L расположена на диагонали AC, причем $AL : LC = 3 : 1$. Найдите угол KLD.

1.156. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит противолежащую сторону так, что отрезок, прилежащий к вершине треугольника, равен его основанию. Докажите, что эта биссектриса также равна основанию треугольника.

1.157. Высота и медиана, проведенные из одной вершины, делят угол треугольника на три равные части. Найдите углы треугольника.

1.158. В треугольнике ABC угол B равен $20°$, угол C равен $40°$. Биссектриса AD равна 2. Найдите разность сторон BC и AB.

1.159. Постройте равнобедренный треугольник, если заданы основания его биссектрис.

Задачи третьего уровня

1.160. На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в 2 раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.

1.161. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ известно, что $AE = AD$, $AC = AB$ и $\angle DAC = \angle AEB + \angle ABE$. Докажите, что DC в два раза больше медианы AK треугольника ABE.

1.162. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины, вдвое меньше другой биссектрисы. Найдите углы треугольника.

1.163. В треугольнике ABC с углом B, равным $120°$, биссектрисы AE, BD и CM пересекаются в точке O. Докажите, что $\angle DMO = 30°$.

§ 1.4. Геометрические построения. Окружность

Окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (называемой *центром* окружности).

Расстояние от точек окружности до ее центра называется *радиусом* окружности.

Отрезок, соединяющий любую точку окружности с центром, также называют *радиусом.*

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой.*

Диаметром окружности называется хорда, проходящая через центр.

Теорема. *Около любого треугольника можно описать единственную окружность. Центр окружности, описанной около треугольника, — точка пересечения серединных перпендикуляров его сторон.*

Основные построения с помощью циркуля и линейки.

1. *Суммы и разности двух отрезков.*
2. *Треугольника по трем сторонам.*
3. *Угла, равного данному.*
4. *Суммы и разности двух углов.*
5. *Треугольника по двум сторонам и углу между ними.*
6. *Треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам.*
7. *Середины отрезка.*

8. *Прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой.*
9. *Биссектрисы угла.*
10. *Прямоугольного треугольника*: *а) по двум катетам*; *б) по катету и гипотенузе*; *в) по катету и острому углу*; *г) по гипотенузе и острому углу.*
11. *Прямой, проходящей через данную точку, параллельно данной прямой.*

Пример 1. Докажите, что равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.

Решение. Пусть AB и A_1B_1 — равные хорды окружности с центром O, не являющиеся диаметрами (рис. 12). Расстояния от центра окружности до этих хорд равны перпендикулярам OM и OM_1, опущенным на хорды из центра окружности. Поскольку M и M_1 — середины хорд, $AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}A_1B_1 = A_1M_1$. Значит, прямоугольные треугольники AMO и A_1M_1O равны по катету и гипотенузе (радиус окружности). Следовательно, $OM = OM_1$. Если AB и A_1B_1 — диаметры, утверждение очевидно.

Пример 2. На отрезке AB как на диаметре построена окружность. Докажите, что из всех точек окружности, отличных от A и B, отрезок AB виден под прямым углом.

Решение. Пусть точка M, отличная от A и B, лежит на указанной окружности (рис. 13). Тогда медиана MO треугольника AMB (радиус окружности) равна половине стороны AB (диаметр окружности). Следовательно, $\angle AMB = 90°$ (см. задачу **1.128⁰**).

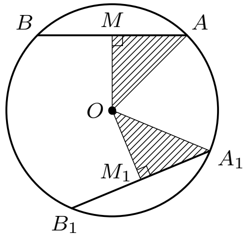

Рис. 12

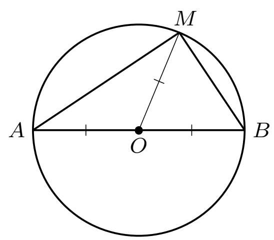

Рис. 13

Пример 3. Две окружности пересекаются в точках A и B, AM и AN — диаметры окружностей. Докажите, что точки M, N и B лежат на одной прямой.

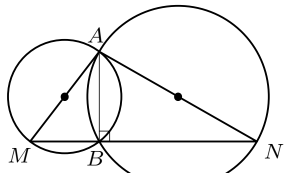

Рис. 14

Решение. Поскольку точка B лежит на окружности с диаметром AM, $\angle ABM = 90^\circ$ (рис. 14). Аналогично, $\angle ABN = 90^\circ$. Следовательно, точки M и N лежат на прямой, перпендикулярной AB и проходящей через точку B.

Задачи первого уровня

1.164^0. Докажите следующие свойства окружности:

а) диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам;

б) диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде;

в) окружность симметрична относительно каждого своего диаметра;

г) дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны;

д) хорды, удаленные от центра окружности на равные расстояния, равны.

1.165. Постройте окружность данного радиуса, высекающую на данной прямой отрезок, равный данному.

1.166. Через точку окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.

1.167. Через точку A окружности с центром O проведены диаметр AB и хорда AC. Докажите, что угол BAC вдвое меньше угла BOC.

1.168. Угол между радиусами OA и OB окружности равен 60°. Найдите хорду AB, если радиус окружности равен R.

1.169. Разделите окружность с данным центром на 6 равных частей, пользуясь только циркулем.

1.170. Найдите угол между радиусами OA и OB, если расстояние от центра O окружности до хорды AB: а) вдвое меньше AB; б) вдвое меньше OA.

1.171. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу описанной окружности.

1.172. Дана окружность с центром O. На продолжении хорды AB за точку B отложен отрезок BC, равный радиусу. Через точки C и O проведена секущая CD (D — точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка CO). Докажите, что $\angle AOD = 3\angle ACD$.

1.173. Даны две концентрические окружности и пересекающая их прямая. Докажите, что отрезки этой прямой, заключенные между окружностями, равны.

1.174. Равные хорды окружности с центром O пересекаются в точке M. Докажите, что MO — биссектриса угла между ними.

1.175. Прямая, проходящая через общую точку A двух окружностей, пересекает вторично эти окружности в точках B и C соответственно. Расстояние между проекциями центров окружностей на эту прямую равно 12. Найдите BC, если известно, что точка A лежит на отрезке BC.

1.176. Две хорды окружности взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние от точки их пересечения до центра окружности равно расстоянию между их серединами.

1.177. В круге даны две взаимно перпендикулярные хорды. Каждая из них делится другой хордой на отрезки, равные a и b ($a < b$). Найдите расстояние от центра окружности до каждой хорды.

1.178. Рассматриваются все хорды окружности, имеющие заданную длину. Найдите геометрическое место их середин.

1.179. Докажите, что центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, — середина гипотенузы.

1.180^0. Найдите геометрическое место точек M, из которых данный отрезок AB виден под прямым углом (т. е. $\angle AMB = 90^\circ$).

1.181. Найдите центр данной окружности с помощью чертежного угольника.

1.182. BM и CN — высоты треугольника ABC. Докажите, что точки B, N, M и C лежат на одной окружности.

1.183. Через точку A, лежащую на окружности, проведены диаметр AB и хорда AC, причем $AC = 8$ и $\angle BAC = 30^\circ$. Найдите хорду CM, перпендикулярную AB.

1.184. Через концы диаметра окружности проведены две хорды, пересекающиеся на окружности и равные 12 и 16. Найдите расстояния от центра окружности до этих хорд.

1.185. Известно, что AB — диаметр окружности, а хорды AC и BD параллельны. Докажите, что $AC = BD$, а CD — также диаметр.

1.186. Биссектрисы внутреннего и внешнего угла при вершине A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках P и Q. Докажите, что окружность, построенная на отрезке PQ как на диаметре, проходит через точку A.

1.187. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке K. Найдите CK, если $AC = 2$ и $\angle A = 30^\circ$.

1.188. Докажите, что окружность, построенная на стороне равностороннего треугольника как на диаметре, проходит через середины двух других сторон треугольника.

1.189. Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.

1.190. Окружность, построенная на стороне треугольника как на диаметре, проходит через середину другой стороны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

Задачи второго уровня

1.191. В окружности проведены хорды AB и CD. Расстояние между равными параллельными хордами AB и CD равно радиусу окружности. Найдите угол между пересекающимися прямыми AC и BD.

1.192. Продолжения равных хорд AB и CD окружности соответственно за точки B и C пересекаются в точке P. Докажите, что треугольники APD и BPC равнобедренные.

1.193. Продолжения хорд AB и CD окружности с диаметром AD пересекаются под углом 25°. Найдите острый угол между хордами AC и BD.

1.194. Окружность, построенная на биссектрисе AD треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AB и AC соответственно в точках M и N, отличных от A. Докажите, что $AM = AN$.

1.195. Найдите внутри треугольника ABC такую точку P, чтобы общие хорды каждой пары окружностей, построенных на отрезках PA, PB и PC как на диаметрах, были равны.

1.196. Центр окружности, описанной около треугольника, симметричен центру окружности, вписанной в этот треугольник, относительно одной из сторон. Найдите углы треугольника.

1.197. Докажите, что отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC треугольника ABC как на диаметрах, лежит на прямой BC.

1.198. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу пополам. Найдите углы треугольника.

1.199. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу в отношении $1 : 3$. Найдите острые углы треугольника.

1.200. Через точку A проведена прямая, пересекающая окружность с диаметром AB в точке K, отличной от A, а окружность с центром B — в точках M и N. Докажите, что $MK = KN$.

1.201. Найдите геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки на прямые, проходящие через другую данную точку.

1.202. Через данную точку окружности проведите хорду, которая бы делилась данной хордой пополам.

1.203. Впишите в окружность прямоугольный треугольник, катеты которого проходили бы через две данные точки.

1.204. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и проекции одного из катетов на гипотенузу.

1.205. Дана окружность и две неравные параллельные хорды. Используя только линейку, разделите эти хорды пополам.

1.206. Постройте центр данной окружности с помощью двусторонней линейки, если известно, что ширина линейки меньше диаметра окружности.

1.207. Постройте окружность данного радиуса, высекающую на сторонах данного острого угла равные отрезки данной длины.

1.208. Постройте окружность, на которой стороны данного треугольника высекают три хорды, равные заданному отрезку.

1.209. Дан острый угол и две точки внутри него. Постройте окружность, проходящую через эти точки и высекающую на сторонах угла равные отрезки.

1.210. Докажите, что точка пересечения биссектрис треугольника ABC, точки B и C, а также точка пересечения биссектрис внешних углов с вершинами B и C лежат на одной окружности.

1.211. Точки A, B, C и D последовательно расположены на окружности, причем центр O окружности расположен внутри четырехугольника $ABCD$. Точки K, L, M и N — середины отрезков AB, BC, CD и AD соответственно. Докажите, что $\angle KON + \angle MOL = 180°$.

1.212. Постройте прямую, перпендикулярную данной прямой и проходящую через данную на ней точку, проведя не более трех линий.

1.213. Даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек, каждая из которых симметрична точке A относительно некоторой прямой, проходящей через точку B.

1.214^{0}. Через точку пересечения двух окружностей проведите секущую, часть которой внутри окружностей была бы равна данному отрезку (центры окружностей расположены по разные стороны от общей хорды).

1.215. Через точку пересечения двух окружностей проведите прямую, на которой окружности высекают хорды, сумма которых наибольшая (центры окружностей расположены по разные стороны от их общей хорды).

1.216. На сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах построены четыре окружности. Докажите, что общая хорда окружностей, построенных на двух соседних сторонах, параллельна общей хорде двух других окружностей.

1.217. На сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах построены четыре круга. Докажите, что они покрывают весь четырехугольник.

Задачи третьего уровня

1.218. Дана окружность, ее диаметр AB и точка C на этом диаметре. Постройте на окружности две точки X и Y, симметричные относительно диаметра AB, для которых прямая YC перпендикулярна прямой XA.

1.219. Даны окружность, ее центр и две точки A и B, не лежащие на окружности. Пользуясь только циркулем, постройте точки пересечения окружности с прямой AB, если известно, что эта прямая не проходит через центр окружности.

§ 1.5. Касательная к окружности

Касательной к окружности называется прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку (называемую *точкой касания*).

Теорема о касательной. *Радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.*

Теорема (обратная). *Если прямая, проходящая через точку, лежащую на окружности, перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то она является касательной к окружности.*

Пример 1. Угол с вершиной C равен $120°$. Окружность радиуса R касается сторон угла в точках A и B. Найдите AB.

Решение. Пусть O — центр окружности (рис. 15). Из равенства прямоугольных треугольников AOC и BOC (по катету и гипотенузе) следует, что $\angle ACO = \angle BCO = 60°$, значит, $\angle AOC = \angle BOC = 30°$ и $\angle AOB = 60°$, поэтому треугольник AOB равносторонний. Следовательно, $AB = AO = R$.

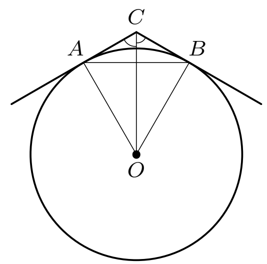

Рис. 15

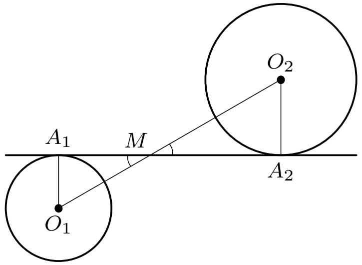

Рис. 16

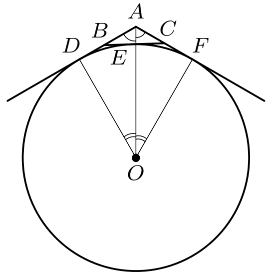

Рис. 17

Пример 2. Окружности, центры которых расположены по разные стороны от некоторой прямой, касаются этой прямой. Линия центров пересекает прямую под углом, равным 30°. Найдите расстояние между центрами окружностей, если их радиусы равны r и R.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиусов r и R соответственно (рис. 16), A_1 и A_2 — их точки касания с данной прямой, M — точка пересечения прямых A_1A_2 и O_1O_2. В прямоугольных треугольниках A_1O_1M и A_2O_2M углы A_1MO_1 и A_2MO_2 равны по 30°, поэтому

$$O_1M = 2O_1A_1 = 2r \quad \text{и} \quad O_2M = 2A_2O_2 = 2R.$$

Следовательно, $O_1O_2 = O_1M + O_2M = 2(r + R)$.

Пример 3. Угол при вершине A треугольника ABC равен 120°. Окружность касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Докажите, что расстояние от вершины A до центра окружности равно периметру треугольника ABC.

Решение. Пусть O — центр окружности (рис. 17), D, E и F — точки касания с прямыми AB, BC и AC соответственно, $2p$ — периметр треугольника ABC. Тогда $AD = AF$, $BE = BD$ и $CE = CF$. Поэтому

$$\begin{aligned}2p &= AB + BC + AC = \\ &= AB + (BE + EC) + AC = (AB + BE) + (EC + AC) = \\ &= (AB + BD) + (CF + AC) = AD + AF,\end{aligned}$$

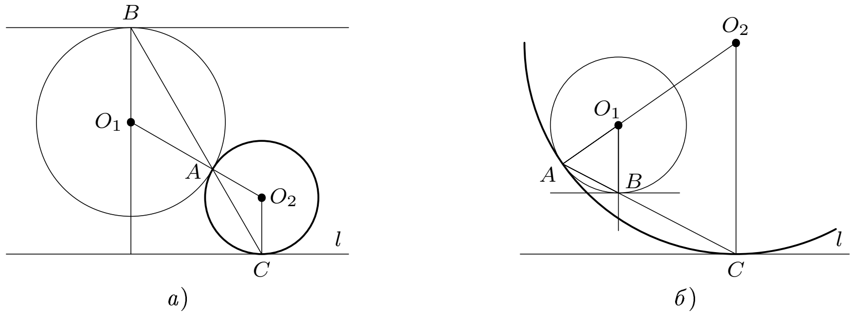

Рис. 18

значит, $AD = AF = p$. Поскольку луч AO — биссектриса угла DAC, то $\angle DAO = 60°$. Из прямоугольного треугольника ADO находим, что $AO = 2AD = 2p$.

Пример 4. Постройте окружность, касающуюся данной окружности и данной прямой в данной на ней точке.

Решение. Предположим, задача решена. Пусть построенная окружность с центром O_2 касается данной прямой l в данной точке C, а данной окружности с центром O_1 — в точке A (рис. 18, a).

Пусть прямая AC вторично пересекает данную окружность в точке B. Тогда касательная, проведенная к этой окружности в точке B, параллельна прямой l, а точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой.

Отсюда вытекает следующее построение. Проведем касательную к данной окружности, параллельную данной прямой l. Пусть B — точка касания, а прямая BC пересекает данную окружность в точке A. Тогда центр O_2 искомой окружности найдем как точку пересечения перпендикуляра к прямой l, восставленного из точки C, и прямой O_1A.

Если данная окружность не имеет с прямой l общих точек, задача имеет два решения (рис. 18, a, $б$).

Задачи первого уровня

1.220. Докажите, что касательные к окружности, проведенные через концы диаметра, параллельны.

1.221^0. Через точку M проведены две касательные MA и MB к окружности (A и B — точки касания). Докажите, что $MA = MB$.

1.222. Точки A и B лежат на окружности. Касательные к окружности, проведенные через эти точки, пересекаются в точке C. Найдите углы треугольника ABC, если $AB = AC$.

1.223. Расстояние от точки M до центра O окружности равно диаметру. Через точку M проведены две прямые, касающиеся окружности в точках A и B. Найдите углы треугольника AOB.

1.224. Хорда большей из двух концентрических окружностей касается меньшей. Докажите, что точка касания делит эту хорду пополам.

1.225^0. Докажите, что центр окружности, вписанной в угол, расположен на его биссектрисе.

1.226. Две прямые касаются окружности с центром O в точках A и B и пересекаются в точке C. Найдите угол между этими прямыми, если $\angle ABO = 40^\circ$.

1.227. Две прямые, пересекающиеся в точке C, касаются окружности в точках A и B. Известно, что $\angle ACB = 120^\circ$. Докажите, что сумма отрезков AC и BC равна отрезку OC.

1.228^0. Окружность касается двух параллельных прямых и их секущей. Докажите, что отрезок секущей, заключенный между параллельными прямыми, виден из центра окружности под прямым углом.

1.229. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC. В треугольник ABD и ACD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2. Докажите, что отрезок O_1O_2 виден из точки D под прямым углом.

1.230. Центр окружности, описанной около треугольника, совпадает с центром вписанной окружности. Найдите углы треугольника.

1.231^0. В прямой угол вписана окружность радиуса R, касающаяся сторон угла в точках A и B. Через некоторую точку на меньшей дуге AB окружности проведена касательная, отсекающая от данного угла треугольник. Найдите его периметр.

1.232. К окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной, равной a, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.

1.233. К окружности, вписанной в квадрат со стороной, равной a, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.

1.234. Прямая, параллельная хорде AB, касается окружности в точке C. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

1.235. Точка A лежит вне данной окружности с центром O. Окружность с диаметром OA пересекается с данной в точках B и C. Докажите, что прямые AB и AC — касательные к данной окружности.

1.236. Из точки M, лежащей вне двух концентрических окружностей, проведены четыре прямые, касающиеся окружностей в точках A, B, C и D. Докажите, что точки M, A, B, C, D расположены на одной окружности.

1.237^0. Через данную точку проведите касательную к данной окружности.

1.238. Постройте треугольник, если известны отрезки, на которые вписанная окружность делит его сторону, и радиус вписанной окружности.

1.239. Постройте касательную к данной окружности, параллельную данной прямой.

1.240. Две прямые, проходящие через точку M, лежащую вне окружности с центром O, касаются окружности в точках A и B. Отрезок OM делится окружностью пополам. В каком отношении отрезок OM делится прямой AB?

1.241. Точка D — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Окружность, вписанная в треугольник ACD, касается отрезка CD в его середине. Найдите острые углы треугольника ABC.

Задачи второго уровня

1.242. Постройте хорду данной окружности, равную и параллельную заданному отрезку.

1.243. Окружность проходит через вершину C и середины D и E сторон BC и AC равностороннего треугольника ABC. Докажите, что прямая, проходящая через середины сторон AB и BC, — касательная к окружности.

1.244. Постройте прямую, касающуюся данной окружности в данной точке, не используя центр окружности.

1.245. Окружность вписана в треугольник со сторонами, равными a, b и c. Найдите отрезки, на которые точка касания делит сторону, равную a.

1.246. Окружность вписана в пятиугольник со сторонами, равными a, b, c, d и e. Найдите отрезки, на которые точка касания делит сторону, равную a.

1.247. Прямая касается окружности с центром O в точке A. Точка C на этой прямой и точка D на окружности расположены по разные стороны от прямой OA. Найдите угол CAD, если угол AOD равен $110°$.

1.248. Прямая касается окружности с центром O в точке A. Точка C на этой прямой и точка D на окружности расположены по одну сторону от прямой OA. Докажите, что угол CAD вдвое меньше угла AOD.

1.249. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и радиусу вписанной окружности.

1.250. Проведите к данной окружности касательную, от которой данная прямая отсекала бы данный отрезок, т. е. чтобы один конец отрезка лежал на прямой, а второй — на окружности.

1.251. Постройте точку так, чтобы касательные, проведенные из нее к двум данным окружностям, были равны данным отрезкам.

1.252^0. Докажите, что если окружность касается всех сторон четырехугольника, то суммы противоположных сторон четырехугольника равны между собой.

1.253. Окружность высекает на сторонах четырехугольника равные хорды. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

1.254. Окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M и продолжений двух других сторон. Докажите, что прямая AM делит треугольник на два треугольника с равными периметрами.

1.255. В равнобедренный треугольник с основанием, равным a, вписана окружность и к ней проведены три касательные так, что они отсекают от данного треугольника три маленьких треугольника, сумма периметров которых равна b. Найдите боковую сторону данного треугольника.

1.256. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC соответственно в точках K, M и N. Найдите угол KMN, если $\angle A = 70°$.

1.257. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC соответственно в точках K, L и M. Известно, что $\angle KLM = \alpha$. Найдите $\angle BOC$.

1.258^0. Пусть r — радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c. Докажите, что $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

1.259. CH — высота прямоугольного треугольника ABC, проведенная из вершины прямого угла. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники ACH, BCH и ABC, равна CH.

1.260^0. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M. Пусть $AM = x$, $BC = a$, полупериметр треугольника равен p. Докажите, что $x = p - a$.

1.261. CD — медиана треугольника ABC. Окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, касаются отрезка CD в точках M и N. Найдите MN, если $AC - BC = 2$.

1.262. На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка D, причем $BD - AD = 4$. Найдите расстояние между точками, в которых окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, касаются отрезка CD.

1.263^0. Окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M, а продолжений сторон AB и AC — в точках N и P соответственно. Вписанная в этот треугольник окружность касается стороны BC в точке K, а стороны AB — в точке L. Докажите, что: а) отрезок AN равен полупериметру треугольника ABC; б) $BK = CM$; в) $NL = BC$.

1.264. В треугольник со сторонами 6, 10 и 12 вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две бо́льшие стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.

1.265. Через данную точку проведите прямую, отсекающую от данного угла треугольник заданного периметра.

1.266. Прямая, проходящая через центры двух окружностей, называется их линией центров. Докажите, что общие внешние (внутренние) касательные к двум окружностям пересекаются на линии центров этих окружностей.

1.267^{0}. Постройте общие касательные к двум данным окружностям.

1.268^{0}. Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку (точка касания окружностей). Докажите, что линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку их касания.

1.269. Докажите, что две окружности касаются тогда и только тогда, когда они касаются некоторой прямой в одной и той же точке.

1.270. Две окружности касаются внешним (внутренним) образом. Докажите, что сумма (разность) их радиусов равна расстоянию между центрами. Верно ли обратное?

1.271. Окружность с центром O касается в точке A внутренним образом большей окружности. Из точки B большей окружности, диаметрально противоположной точке A, проведена хорда BC большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке M. Докажите, что $OM \parallel AC$.

1.272. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекает их общую касательную, проходящую через точку K, в точке M. Докажите, что $\angle O_1MO_2 = \angle AKB = 90^\circ$.

1.273. В острый угол, равный 60°, вписаны две окружности, касающиеся друг друга внешним образом. Радиус меньшей окружности равен r. Найдите радиус большей окружности.

1.274. Две окружности касаются внутренним образом. Известно, что два радиуса большей окружности, угол между которыми равен 60°, касаются меньшей окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.

1.275^{0}. Две окружности касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает эти окружности вторично в точках B и C соответственно. Докажите, что касательные, проведенные к этим окружностям в точках B и C, параллельны.

1.276. Постройте окружность, касающуюся данной прямой и данной окружности в данной на ней точке.

1.277. В четырехугольнике $MNPQ$ расположены две непересекающиеся окружности так, что одна из них касается сторон MN, NP и PQ, а другая — сторон MN, MQ и PQ. Точки B и A лежат соответственно на сторонах MN и PQ, причем отрезок AB касается обеих окружностей. Найдите сторону MQ, если $NP = b$ и периметр четырехугольника $BAQM$ больше периметра четырехугольника $ABNP$ на $2p$.

Задачи третьего уровня

1.278. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1, причем $AC_1 = AB_1$, $BA_1 = BC_1$ и $CA_1 = CB_1$. Докажите, что A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника.

1.279. Постройте окружности с центрами в трех данных точках, попарно касающиеся друг друга внешним образом.

1.280. Даны три точки A, B и C. Постройте три окружности, попарно касающиеся в этих точках.

1.281^{0}. Суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны между собой. Докажите, что все стороны четырехугольника касаются некоторой окружности.

§ 1.6. Геометрическое место точек

Геометрическое место точек, удаленных от данной точки на заданное положительное расстояние, — окружность.

Геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка, — серединный перпендикуляр к отрезку.

Геометрическое место внутренних точек угла, равноудаленных от его сторон, — биссектриса угла.

Геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой, — две параллельные прямые.

Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом, — окружность без двух точек.

Пример 1. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся данной прямой в данной точке.

Решение. Пусть окружность с центром O касается данной прямой l в данной точке M (рис. 19). Поскольку радиус OM, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной l, то точка O лежит на прямой m, проходящей через точку M перпендикулярно прямой l.

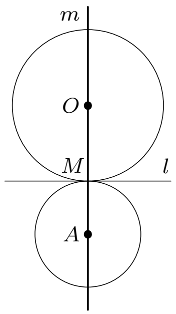

Рис. 19

Возьмем теперь на прямой m произвольную точку A, отличную от M. Тогда окружность с центром A и радиусом AM касается прямой l в точке M.

Мы доказали, что, во-первых, центр любой окружности, касающейся прямой l в точке M, лежит на прямой m, во-вторых, что каждая точка прямой m, отличная от M, является центром окружности, касающейся прямой l в точке M. Следовательно, прямая m без точки M есть искомое геометрическое место точек.

Пример 2. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и высекающую на данной прямой отрезок, равный данному.

Решение. Предположим, что искомая окружность построена (рис. 20). Пусть O — ее центр, R — данный радиус, M — данная точка, AB — хорда построенной окружности, лежащая на данной прямой l. Опустим перпендикуляр OC на прямую l. В прямоугольном треугольнике OBC известна гипотенуза (данный радиус R) и катет BC, равный половине данного отрезка. Кроме того, $OM = R$. Значит, искомый центр O принадлежит, во-первых, геометрическому месту точек, удаленных от данной

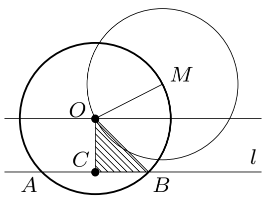

Рис. 20

прямой l на расстояние, равное OC (две параллельные прямые); во-вторых, геометрическому месту точек, удаленных от данной точки M на расстояние, равное данному радиусу R (окружность с центром M и радиусом R).

Отсюда вытекает следующее построение. Построив прямоугольный треугольник по гипотенузе R и катету, равному половине данного отрезка, найдем расстояние от искомого центра O до данной прямой (второй катет построенного треугольника). Теперь построим первое геометрическое место точек — две прямые, параллельные данной прямой l и удаленные от нее на расстояние, равное второму катету построенного треугольника. Далее строим окружность с центром M и радиусом R. Каждая из точек пересечения построенных геометрических мест есть центр искомой окружности.

Пример 3. Найдите геометрическое место внутренних точек данного угла, сумма расстояний от которых до сторон этого угла равна заданной величине.

Решение. На расстоянии, равном данной величине a, проведем прямую, параллельную стороне OB данного угла AOB (рис. 21), и пересекающую сторону OA в точке C. Пусть D — точка проведенной прямой, лежащая внутри угла AOB. Тогда сумма расстояний от любой внутренней точки угла AOB, лежащей на биссектрисе угла OCD, до сторон OA и OB равна a. Обратно, если сумма расстояний от некоторой внутренней точки N угла AOB до сторон этого угла равна a и P, Q — проекции этой точки на прямые OA и OB, то $NQ + NP = a$ и $NQ + NF = a$, где F — проекция точки N на прямую CD. Поэтому $NP = NF$. Следовательно, точка N лежит на биссектрисе угла OCD.

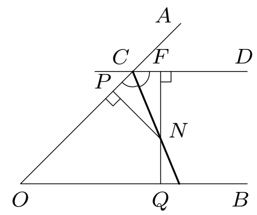

Рис. 21

Задачи первого уровня

1.282. Дан отрезок AB. Найдите геометрическое место точек M, для которых $\angle MAB = 70°$.

1.283. Найдите геометрическое место вершин равнобедренных треугольников с данным основанием.

1.284. Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки.

1.285. Найдите геометрическое место центров окружностей, имеющих данный радиус и проходящих через данную точку.

1.286. На данной прямой постройте точку, равноудаленную от двух данных точек.

1.287. На данной окружности постройте точку, которая находилась бы на данном расстоянии от данной прямой.

1.288. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.

1.289. Постройте окружность, которая проходила бы через две данные точки и центр которой находился бы на данной прямой.

1.290. Постройте окружность с центром в данной точке на стороне данного угла, которая на другой стороне угла отсекала бы хорду данной длины.

1.291. Найдите геометрическое место центров окружностей данного радиуса, касающихся данной прямой.

1.292. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и касающуюся данной прямой.

1.293. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой в данной точке.

1.294. Постройте окружность, проходящую через данную точку A и касающуюся данной прямой в данной точке B.

1.295. Найдите геометрическое место центров окружностей данного радиуса, высекающих на данной прямой отрезки, равные данному.

1.296. Постройте треугольник по двум сторонам и радиусу описанной окружности.

1.297. Найдите геометрическое место середин всех хорд данной окружности.

1.298. Найдите геометрическое место середин хорд окружности, параллельных данной прямой.

1.299. Дана окружность. Найдите геометрическое место середин ее хорд, имеющих данную длину.

1.300. На листе прозрачной бумаги нарисован угол, вершина которого недоступна (находится вне чертежа). Как без всяких инструментов построить биссектрису этого угла?

1.301. На прозрачной бумаге нарисован треугольник. Без всяких инструментов постройте центр вписанной в него окружности.

1.302. На прозрачной бумаге нарисован треугольник. Без всяких инструментов постройте центр описанной около него окружности.

1.303. Найдите геометрическое место центров окружностей, вписанных в данный угол.

1.304. Постройте окружность, касающуюся двух данных прямых, причем одной из них — в данной точке.

1.305. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от трех прямых.

1.306. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся двух данных пересекающихся прямых.

1.307. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности в данной на ней точке.

1.308. Постройте окружность с данным центром, касающуюся данной окружности.

1.309. Найдите геометрическое место центров окружностей данного радиуса, касающихся данной окружности.

1.310. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и касающуюся данной окружности.

1.311. Постройте окружность данного радиуса, которая касалась бы данной прямой и данной окружности.

1.312. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных параллельных прямых.

1.313. Постройте окружность, которая касалась бы двух данных параллельных прямых и круга, находящегося между ними.

1.314. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся двух данных окружностей.

Задачи второго уровня

1.315. Постройте окружность, касающуюся двух данных концентрических окружностей (концентрическими окружностями называются окружности с общим центром).

1.316. Постройте окружность, которая проходила бы через данную точку и касалась бы данной окружности в данной точке.

1.317. Впишите в данный треугольник ABC равнобедренный треугольник MNK данной высоты так, чтобы его основание MN было параллельно AB, а вершина K лежала на стороне AB.

1.318. Даны точки A и B. Проводятся всевозможные окружности с центром в точке B и радиусом, не превосходящим AB, а через точку A — касательные к ним. Найдите геометрическое место точек касания.

1.319. Дана окружность с центром O и точка A внутри нее. Постройте окружность, проходящую через точки A и O и касающуюся данной окружности.

1.320. Постройте треугольник по радиусу описанной окружности, стороне и высоте, проведенной к другой стороне.

1.321. Дана линейка постоянной ширины (т. е. с параллельными краями) и без делений. Постройте биссектрису данного угла.

1.322. Точка A лежит на окружности. Найдите геометрическое место таких точек M, что отрезок AM делится этой окружностью пополам.

1.323. Дана линейка с делениями через 1 см. Постройте биссектрису данного угла.

1.324. Точка O лежит на отрезке AC. Найдите геометрическое место точек M, для которых $\angle MOC = 2\angle MAC$.

1.325. Постройте треугольник по стороне и проведенной к ней высоте, если известно, что эта сторона видна из центра вписанной в треугольник окружности под углом 135°.

1.326. Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден: а) под острым углом; б) под тупым углом.

1.327. Через данную точку проведите прямую, на которой данная окружность высекала бы хорду, равную данному отрезку.

1.328. Постройте прямую, на которой две данные окружности высекали бы хорды, равные двум данным отрезкам.

1.329. Постройте окружность, касающуюся двух данных окружностей, причем одной из них — в данной точке.

Задачи третьего уровня

1.330. Точка X движется по окружности с центром O. На каждом радиусе OX откладывается отрезок OM, длина которого равна расстоянию от точки X до заданного диаметра окружности. Найдите геометрическое место точек M.

1.331. На стороне треугольника постройте точку, сумма расстояний от которой до двух других сторон равна данному отрезку.

§ 1.7. Геометрические неравенства

1. *Против большей стороны треугольника лежит больший угол.*

Доказательство. Пусть сторона AB треугольника ABC больше стороны AC (рис. 22, *а*). Отложим на стороне AB отрезок AD, равный AC. Тогда точка D лежит между точками A и B. В равнобедренном треугольнике ADC углы при основании CD равны, а так как угол ADC — внешний угол треугольника DBC, то

$$\angle ACB > \angle ACD = \angle ADC = \angle ABC + \angle DCB > \angle ABC.$$

2. *Против большего угла треугольника лежит бо́льшая сторона.*

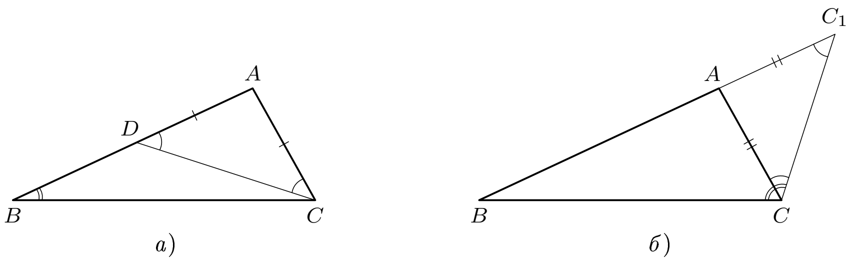

Рис. 22

3. Неравенство треугольника. *Сумма любых двух сторон треугольника больше третьей стороны.*

Доказательство. На продолжении стороны AB треугольника ABC за вершину A отложим отрезок AC_1, равный AC (рис. 22, *б*). В равнобедренном треугольнике CAC_1 угол AC_1C равен углу ACC_1. Так как точка A лежит на отрезке BC_1, то $\angle BCC_1 = \angle BCA + ACC_1$, поэтому $\angle BC_1C = \angle ACC_1 < \angle BCC_1$. Таким образом, в треугольнике BCC_1 против большего угла лежит бóльшая сторона, т. е. $BC_1 > BC$. Следовательно,

$$BA + AC = BA + AC_1 > BC.$$

4. *Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, причем $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, а угол BAC больше угла $B_1A_1C_1$. Тогда BC больше B_1C_1.*

Доказательство. Рассмотрим такую точку D, чтобы треугольник ABD был равен треугольнику $A_1B_1C_1$, а точки D и C были бы расположены по одну сторону от прямой AB (рис. 23). Тогда, так как $\angle BAC > \angle B_1A_1C_1 = \angle BAD$, луч AD будет расположен между сторонами угла BAC.

Проведем биссектрису AM угла CAD. Она также будет расположена между сторонами угла BAC, поэтому точка E ее пересечения с прямой BC будет расположена между точками B и C.

Треугольники ADE и ACE равны по двум сторонам и углу между ними, значит, $DE = CE$. Применяя неравенство треугольника к треугольнику BDE, получим, что

$$BC = BE + EC = BE + DE > BD = B_1C_1.$$

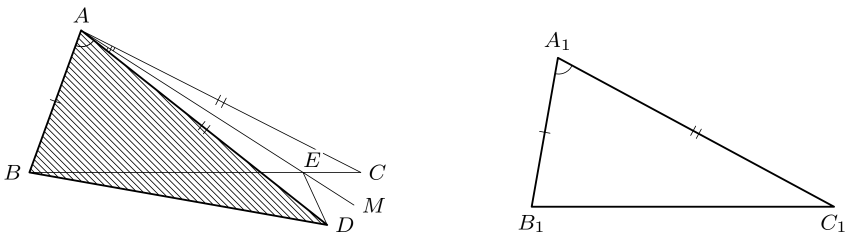

Рис. 23

5. *Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, причем $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, а BC больше B_1C_1. Тогда угол BAC больше угла $B_1A_1C_1$.*

Пример 1. Докажите, что каждая сторона четырехугольника меньше суммы трех других его сторон.

Решение. Пусть AC — диагональ четырехугольника $ABCD$ (рис. 24). Применив неравенство треугольника к треугольникам ACD и ABC, получим

$$AD < AC + CD < (AB + BC) + CD.$$

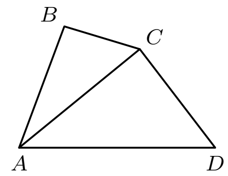

Рис. 24

Пример 2. Докажите, что высота неравнобедренного прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, меньше половины гипотенузы.

Решение. Пусть CH — высота прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB (рис. 25). Проведем медиану CM. Тогда CH — катет прямоугольного треугольника CHM с гипотенузой CM, поэтому $CH < CM$, а так как медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, то $CH < \frac{1}{2}AB$.

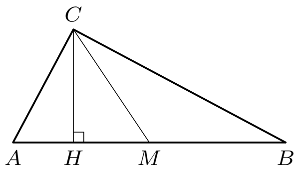

Рис. 25

Пример 3. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB и AC соответственно в точках M и N. Докажите, что $BN > MN$.

Решение. В треугольнике BMN (рис. 26) угол BMN тупой как внешний угол равнобедренного треугольника AMN, поэтому BN — наибольшая сторона треугольника BMN.

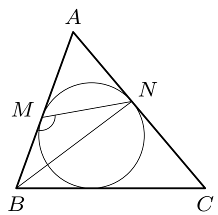

Рис. 26

Задачи первого уровня

1.332. Докажите, что катет прямоугольного треугольника меньше гипотенузы.

1.333. Стороны равнобедренного треугольника равны 1 и 3. Какая из сторон является основанием?

1.334. Может ли основание равнобедренного треугольника быть вдвое больше боковой стороны?

1.335. Может ли периметр треугольника быть равным 19, если одна из его сторон на 1 короче другой и на 3 длиннее третьей?

1.336. Может ли в треугольнике сторона быть вдвое больше другой стороны и вдвое меньше третьей?

1.337. Докажите, что высота треугольника ABC, проведенная из вершины A, не может быть больше стороны AB.

1.338. Докажите, что сумма высот треугольника меньше его периметра.

1.339. В треугольнике ABC с неравными сторонами AB и AC проведены из вершины A высота, медиана и биссектриса. Докажите, что из этих трех отрезков наименьшим является высота.

1.340. Сколько можно составить треугольников из отрезков, равных: а) 2, 3, 4 и 5; б) 2, 3, 4, 5, 6, 7?

1.341. В треугольнике две стороны равны 1 и 6. Найдите третью сторону, если известно, что ее длина равна целому числу.

1.342. В треугольнике ABC известно, что $AB < BC < AC$, а один из углов вдвое меньше другого и втрое меньше третьего. Найдите угол при вершине A.

1.343. В треугольнике ABC угол A равен среднему арифметическому двух других углов. Укажите среднюю по величине сторону треугольника.

1.344. Докажите, что диаметр есть наибольшая хорда окружности.

1.345^{0}. Даны четыре точки A, B, C и D. Докажите, что $AD < AB + BC + CD$.

1.346. Существует ли четырехугольник со сторонами, равными: а) 1, 1, 1, 2; б) 1, 2, 3, 6?

1.347. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит прямой угол на два неравных угла. Докажите, что катет, прилежащий к меньшему из них, меньше другого катета.

1.348. Основание D высоты AD треугольника ABC лежит на стороне BC, причем $\angle BAD > \angle CAD$. Что больше, AB или AC?

1.349. Докажите, что в треугольнике любая сторона меньше половины периметра.

1.350. Докажите, что в четырехугольнике любая диагональ меньше половины периметра.

1.351^{0}. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырехугольника больше суммы его двух противоположных сторон.

1.352. Четыре дома расположены в вершинах выпуклого четырехугольника. Где нужно вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до четырех домов была наименьшей?

1.353. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырехугольника меньше периметра, но больше полупериметра этого четырехугольника.

1.354. Докажите, что отрезок, соединяющий вершину равнобедренного треугольника с точкой, лежащей на основании, не больше боковой стороны треугольника.

Задачи второго уровня

1.355. Биссектриса угла при основании BC равнобедренного треугольника ABC пересекает боковую сторону AC в точке K. Докажите, что $BK < 2CK$.

1.356^{0}. Две окружности радиусов r и R $(r < R)$ пересекаются. Докажите, что расстояние между их центрами: а) меньше, чем $r + R$; б) больше, чем $R - r$.

1.357^{0}. Расстояние между центрами окружностей радиусов 2 и 3 равно 8. Найдите наименьшее и наибольшее из расстояний между точками, одна из которых лежит на первой окружности, а другая — на второй.

1.358. Докажите, что каждая сторона треугольника видна из центра вписанной окружности под тупым углом.

1.359. Верно ли утверждение предыдущей задачи для четырехугольника, в который можно вписать окружность?

1.360. Рассмотрим равнобедренные треугольники с одними и теми же боковыми сторонами. Докажите, что чем больше угол при вершине, тем меньше высота, опущенная на основание.

1.361. Рассмотрим равнобедренные треугольники с одними и теми же боковыми сторонами. Докажите, что чем больше основание, тем меньше проведенная к нему высота.

1.362. Докажите что из двух неравных хорд окружности бóльшая удалена от центра на меньшее расстояние. Верно ли обратное?

1.363. Через данную точку внутри круга проведите наименьшую хорду.

1.364⁰. Докажите, что медиана треугольника ABC, проведенная из вершины A, меньше полусуммы сторон AB и AC, но больше их полуразности.

1.365. Внутри треугольника ABC взята точка M. Докажите, что угол BMC больше угла BAC.

1.366. Пусть CK — биссектриса треугольника ABC и $AC > BC$. Докажите, что угол AKC — тупой.

1.367. Пусть BD — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AB > AD$ и $CB > CD$.

1.368. В треугольнике ABC сторона AC больше стороны BC. Медиана CD делит угол C на два угла. Какой из них больше?

1.369. Биссектриса треугольника делит его сторону на два отрезка. Докажите, что к большей из двух других сторон треугольника примыкает больший из них.

1.370. AD — биссектриса треугольника ABC, причем $BD > CD$. Докажите, что $AB > AC$.

1.371. В треугольнике ABC известно, что $\angle B > 90^\circ$. На отрезке BC взяты точки M и N (M между B и N) так, что лучи AN и AM делят угол BAC на три равные части. Докажите, что $BM < MN < NC$.

1.372. В треугольнике ABC угол B прямой или тупой. На стороне BC взяты точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Докажите, что $\angle BAM > \angle MAN > \angle NAC$.

1.373. Даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек, расстояние от каждой из которых до точки A больше, чем расстояние до точки B.

1.374. В треугольнике ABC с тупым углом C точки M и N расположены соответственно на сторонах AC и BC. Докажите, что отрезок MN короче отрезка AB.

1.375. Отрезок соединяет вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне. Докажите, что этот отрезок меньше большей из двух других сторон.

1.376. Докажите, что расстояние между любыми двумя точками, взятыми на сторонах треугольника, не больше наибольшей из его сторон.

1.377. В треугольнике ABC на наибольшей стороне BC, равной a, выбирается точка M. Найдите наименьшее расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAM и ACM.

1.378. На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC взята точка M, отличная от C. Докажите, что

$$MA + MB > CA + CB.$$

1.379. Угол при вершине A треугольника ABC равен 60°. Докажите, что $AB + AC < 2BC$.

1.380. Пусть AA_1 — медиана треугольника ABC. Докажите, что угол A острый тогда и только тогда, когда $AA_1 > \frac{1}{2}BC$.

1.381. Точки D и E — середины сторон соответственно AB и BC треугольника ABC. Точка M лежит на стороне AC, причем $ME > EC$. Докажите, что $MD < AD$.

1.382. Два противоположных угла выпуклого четырехугольника тупые. Докажите, что диагональ, соединяющая вершины этих углов, меньше другой диагонали.

1.383. Диагональ AC делит вторую диагональ выпуклого четырехугольника $ABCD$ на две равные части. Докажите, что если $AB > AD$, то $BC < DC$.

1.384⁰. Точки M и N расположены по одну сторону от прямой l. Постройте на прямой l такую точку K, чтобы сумма $MK + NK$ была наименьшей.

1.385. Точка M лежит внутри острого угла. Постройте на сторонах этого угла точки A и B, для которых периметр треугольника AMB был бы наименьшим.

Задачи третьего уровня

1.386. Внутри острого угла даны точки M и N. Постройте на сторонах угла точки K и L так, чтобы периметр четырехугольника $MKLN$ был наименьшим.

1.387. Точка C лежит внутри прямого угла AOB. Докажите, что периметр треугольника ABC больше $2OC$.

1.388. Пусть вписанная окружность касается сторон AC и BC треугольника ABC в точках B_1 и A_1. Докажите, что если $AC > BC$, то $AA_1 > BB_1$.

1.389. Точка M расположена внутри треугольника ABC. Докажите, что $BM + CM < AB + AC$.

1.390. Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри треугольника до трех его вершин больше полупериметра, но меньше периметра треугольника.

1.391. Высота треугольника в два раза меньше его основания, а один из углов при основании равен 75°. Докажите, что треугольник равнобедренный.

1.392. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 20°. Докажите, что боковая сторона больше удвоенного основания, но меньше утроенного.

1.393. Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, все диагонали которого равны?

1.394. В некотором царстве, в некотором государстве есть несколько городов, причем расстояния между ними все попарно различны. В одно прекрасное утро из каждого города вылетает по одному самолету, который приземляется в ближайшем городе. Может ли в одном городе приземлиться более пяти самолетов?

Раздел второй
8 класс

§ 2.1. Параллелограмм

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Свойства параллелограмма.

1. *Сумма любых двух соседних углов параллелограмма равна 180°, а противоположные углы равны.*

2. *Диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.*

3. *Противолежащие стороны параллелограмма равны.*

4. *Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.*

Признаки параллелограмма.

1. *Если в четырехугольнике противолежащие стороны попарно равны, то это параллелограмм.*

2. *Если в четырехугольнике противолежащие углы попарно равны, то это параллелограмм.*

3. *Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то это параллелограмм.*

4. *Если диагонали четырехугольника делятся точкой их пересечения пополам, то это параллелограмм.*

Точку пересечения диагоналей параллелограмма называют его *центром.*

Параллелограмм, в котором все углы прямые, называется *прямоугольником.* Можно убедиться, что если в параллелограмме есть один прямой угол, то и все остальные углы будут прямыми.

Диагонали прямоугольника равны. Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Параллелограмм, в котором все стороны равны, называется *ромбом.*

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов. Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб. Если диагонали параллелограмма делят его углы пополам, то этот параллелограмм — ромб.

Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется *квадратом.* У квадрата все стороны равны, а все углы прямые.

Пример 1. Точки K, L, M и N — середины сторон соответственно AB, BC, CD и AD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырехугольник с вершинами в точках пересечения прямых AL, BM, CN и DK — параллелограмм.

Решение. Из определения параллелограмма следует, что $BC \parallel AD$, поэтому $LC \parallel AN$ (рис. 27). Кроме того, $LC = \frac{1}{2}BC = AN$. Значит, противоположные стороны LC и AN четырехугольника $ANCL$ равны и параллельны, следовательно, это параллелограмм. Поэтому $AL \parallel CN$. Аналогично, $BM \parallel DK$. Мы доказали, что противолежащие стороны четырехугольника с вершинами в точках пересечения прямых AL, BM, CN и DK попарно параллельны. Следовательно, это параллелограмм.

Пример 2. Докажите, что прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Решение. Через вершины треугольника ABC проведем

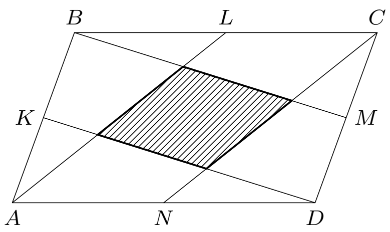

Рис. 27

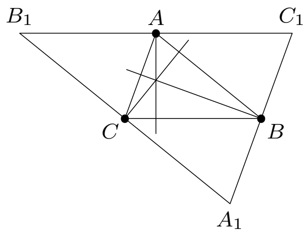

Рис. 28

прямые, параллельные его противолежащим сторонам (рис. 28). Пусть эти прямые пересекаются в точках A_1, B_1 и C_1 (A_1 — точка пересечения прямых, проведенных через B и C и т. д.). Тогда четырехугольники ABA_1C и $ACBC_1$ — параллелограммы, поэтому $A_1B = AC = C_1B$, значит, B — середина стороны A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично докажем, что точки A и C середины сторон B_1C_1 и A_1B_1 соответственно. Следовательно, прямые, содержащие высоты треугольника ABC, являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, а так как серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке, утверждение доказано.

Пример 3. Докажите, что в любом треугольнике ABC середина стороны BC лежит на отрезке, соединяющем точку пересечения высот с точкой окружности, описанной около этого треугольника, диаметрально противоположной вершине A, и делит этот отрезок пополам.

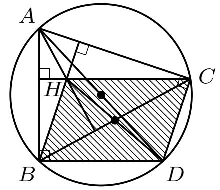

Рис. 29

Решение. Пусть H — точка пересечения высот, AD — диаметр описанной окружности треугольника ABC (рис. 29). Тогда $\angle ACD = 90°$, а так как $BH \perp AC$, то $DC \parallel BH$. Аналогично, $BD \parallel CH$. Значит, четырехугольник $BHCD$ — параллелограмм. Следовательно, его диагонали BC и HD делятся точкой пересечения пополам.

Задачи первого уровня

2.1. Сторона параллелограмма втрое больше другой его стороны. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 24.

2.2. Один из углов параллелограмма на $50°$ меньше другого. Найдите углы параллелограмма.

2.3. Точки M и N — середины противолежащих сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырехугольник $AMCN$ — параллелограмм.

2.4. Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной a, проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося четырехугольника.

2.5. Биссектриса угла параллелограмма делит сторону параллелограмма на отрезки, равные a и b. Найдите стороны параллелограмма.

2.6. Высота параллелограмма, проведенная из вершины тупого угла, равна 2 и делит сторону параллелограмма пополам. Острый угол параллелограмма равен 30°. Найдите диагональ, проведенную из вершины тупого угла, и углы, которые она образует со сторонами.

2.7. Постройте параллелограмм

а) по двум соседним сторонам и углу между ними;

б) по диагоналям и углу между ними;

в) по двум сторонам и диагонали, исходящим из одной вершины.

2.8. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Периметр параллелограмма равен 12, а разность периметров треугольников BOC и COD равна 2. Найдите стороны параллелограмма.

2.9. Треугольники ABC и AB_1C_1 имеют общую медиану AM. Докажите, что $BC_1 = B_1C$.

2.10^0. В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M до точки D на расстояние, равное AM ($AM = MD$). Докажите, что $ABDC$ — параллелограмм.

2.11. Постройте ромб по данным диагоналям.

2.12. Постройте прямоугольник по диагонали и одной из его сторон.

2.13. Докажите, что концы двух различных диаметров окружности являются вершинами прямоугольника.

2.14. Докажите, что около любого прямоугольника можно описать окружность. Где расположен ее центр?

2.15. Докажите, что в любой ромб можно вписать окружность. Где расположен ее центр?

2.16. В данную окружность впишите прямоугольник с данным углом между диагоналями.

2.17. Диагонали прямоугольника равны 8 и пересекаются под углом в 60°. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

2.18. Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Биссектрисы углов A и B пересекают прямую CD в точках M и N, причем $MN = 12$. Найдите стороны параллелограмма.

2.19. Угол при вершине A ромба $ABCD$ равен 20°. Точки M и N — основания перпендикуляров, опущенных из вершины B на стороны AD и CD. Найдите углы треугольника BMN.

2.20. Две равные окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Отрезок O_1O_2 пересекает эти окружности в точках M и N. Докажите, что четырехугольники O_1AO_2B и $AMBN$ — ромбы.

2.21. Докажите, что точки попарного пересечения биссектрис всех четырех углов параллелограмма являются вершинами прямоугольника.

2.22. Квадрат вписан в равнобедренный прямоугольный треугольник, причем одна вершина квадрата расположена на гипотенузе, противоположная ей вершина совпадает с вершиной прямого угла треугольника, а остальные лежат на катетах. Найдите сторону квадрата, если катет треугольника равен a.

2.23. Две вершины квадрата расположены на гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника, а две другие — на катетах. Найдите сторону квадрата, если гипотенуза равна a.

2.24. На каждой стороне квадрата взяли по одной точке. При этом оказалось, что эти точки являются вершинами прямоугольника, стороны которого параллельны диагоналям квадрата. Найдите периметр прямоугольника, если диагональ квадрата равна 6.

2.25. Постройте параллелограмм по двум сторонам и диагонали, исходящим из одной вершины.

2.26. В данный треугольник ABC впишите ромб, имеющий с треугольником общий угол A.

2.27. Около данной окружности опишите ромб с данным углом.

2.28. Вершины M и N равностороннего треугольника BMN лежат соответственно на сторонах AD и CD квадрата $ABCD$. Докажите, что $MN \parallel AC$.

Задачи второго уровня

2.29. Докажите, что отрезок, соединяющий середины противоположных сторон параллелограмма, проходит через его центр.

2.30. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно равны и параллельны. Докажите, что отрезки, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

2.31. На сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M, N, K, L, делящие эти стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм, причем его центр совпадает с центром параллелограмма $ABCD$.

2.32. Через центр параллелограмма $ABCD$ проведены две прямые. Одна из них пересекает стороны AB и CD соответственно в точках M и K, вторая — стороны BC и AD соответственно в точках N и L. Докажите, что четырехугольник $MNKL$ — параллелограмм.

2.33. На сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M, N, K, L, делящие эти стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что при пересечении прямых AN, BK, CL и DM получится параллелограмм, причем его центр совпадает с центром параллелограмма $ABCD$.

2.34. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из вершины D параллелограмма $ABCD$ на диагональ AC. Докажите, что перпендикуляры к прямым AB и BC, проведенные через точки A и C соответственно, пересекутся на прямой DM.

2.35. Через данную точку внутри угла проведите прямую, отрезок которой, заключенный внутри этого угла, делился бы данной точкой пополам.

2.36. Постройте выпуклый четырехугольник по данным серединам трех его равных сторон.

2.37. Докажите, что в параллелограмме против большего угла лежит бо́льшая диагональ.

2.38. Найдите расстояние от центра ромба до его стороны, если острый угол ромба равен 30°, а сторона равна 4.

2.39. Около данной окружности опишите ромб с данной стороной.

2.40. На сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$ взяты точки K и M так, что $AKCM$ является ромбом. Диагональ AC составляет со стороной AB угол 30°. Найдите сторону ромба, если наибольшая сторона прямоугольника $ABCD$ равна 3.

2.41. Через середину диагонали KM прямоугольника $KLMN$ перпендикулярно этой диагонали проведена прямая, пересекающая стороны KL и MN в точках A и B соответственно. Известно, что $AB = BM = 6$. Найдите бо́льшую сторону прямоугольника.

2.42. Прямая, проходящая через центр прямоугольника перпендикулярно диагонали, пересекает бо́льшую сторону прямоугольника под углом, равным 60°. Отрезок этой прямой, заключенный внутри прямоугольника, равен 10. Найдите бо́льшую сторону прямоугольника.

2.43. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через вершину B и середину стороны BC. Найдите углы параллелограмма.

2.44. Постройте квадрат по его центру и двум точкам, лежащим на противоположных сторонах.

2.45. Через центр квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами квадрата являются вершинами еще одного квадрата.

2.46. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки M, N, K, L, делящие эти стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что $KLMN$ — также квадрат.

2.47. Через произвольную точку внутри квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые, каждая из которых пересекает две противоположные стороны квадрата. Докажите, что отрезки этих прямых, заключенные внутри квадрата, равны.

2.48. Прямая имеет с параллелограммом $ABCD$ единственную общую точку B. Вершины A и C удалены от этой прямой на расстояния a и b соответственно. На какое расстояние удалена от этой прямой вершина D?

2.49. Стороны параллелограмма равны a и b. Найдите диагонали четырехугольника, образованного пересечениями биссектрис: а) внутренних углов параллелограмма; б) внешних углов параллелограмма.

2.50. Докажите, что биссектрисы всех четырех углов прямоугольника (не являющегося квадратом) при пересечении образуют квадрат.

2.51. Через точку, расположенную внутри треугольника, проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые разбивают треугольник на три треугольника и три четырехугольника. Пусть a, b и c — параллельные высоты трех этих треугольников. Найдите параллельную им высоту исходного треугольника.

2.52. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки основания равнобедренного треугольника до боковых сторон постоянна.

2.53. Через каждую вершину параллелограмма проведена прямая, перпендикулярная диагонали, не проходящей через эту вершину. Докажите, что диагонали четырехугольника, образованного пересечениями четырех проведенных таким образом прямых, перпендикулярны сторонам параллелограмма.

2.54^{0}. Окружность, построенная на стороне BC треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Отрезки CM и BN пересекаются в точке P. Докажите, что AP перпендикулярно BC.

2.55. С помощью одной линейки опустите перпендикуляр из данной точки на данный диаметр данной окружности (точка не лежит ни на окружности, ни на диаметре).

2.56. Три равных окружности проходят через одну точку и попарно пересекаются в трех других точках A, B и C. Докажите, что треугольник ABC равен треугольнику с вершинами в центрах окружностей.

2.57. Угол при вершине A ромба $ABCD$ равен 60°. На сторонах AB и BC взяты соответственно точки M и N, причем $AM = BN$. Докажите, что треугольник DMN равносторонний.

2.58. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что их центры являются вершинами квадрата.

2.59. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны BC, точка N — середина стороны CD, P — точка пересечения отрезков DM и BN. Докажите, что угол MAN равен углу BPM.

Задачи третьего уровня

2.60. Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны CD, P — проекция вершины C на прямую AB, M — середина стороны AD. Докажите, что $\angle DMP = 3\angle APM$.

2.61. На сторонах AB и AC треугольника ABC постройте соответственно точки M и N так, что $BM = AN$ и MN параллельно BC.

2.62. На каждой стороне квадрата отметили по точке. Затем все, кроме этих точек, стерли. Восстановите квадрат с помощью циркуля и линейки.

2.63. Дана линейка с делениями в 1 см. Проведите какой-нибудь перпендикуляр к данной прямой.

§ 2.2. Средняя линия треугольника

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

Теорема о средней линии треугольника. *Прямая, содержащая среднюю линию треугольника, параллельна третьей стороне треугольника. Средняя линия треугольника равна половине этой стороны.*

Теорема о медианах треугольника. *Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении* $2:1$*, считая от вершины треугольника.*

Доказательство. Докажем сначала, что любые две медианы делятся точкой пересечения в отношении $2:1$, считая от вершины. Пусть медианы BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 30). Отметим середины P и Q отрезков BO и CO. Отрезок PQ — средняя линия треугольника OBC, а отрезок MN — средняя линия треугольника ABC, поэтому $PQ \parallel BC \parallel MN$ и $PQ = \frac{1}{2}BC = MN$. Противоположные стороны PQ и MN четырехугольника $MNPQ$ равны и параллельны, значит, $MNPQ$ — параллелограмм. Его диагонали MP и QN делятся точкой O их пересечения пополам, поэтому $MO = OP = BP$ и $NO = OQ = CQ$. Следовательно, $BO : OM = CO : ON = 2 : 1$.

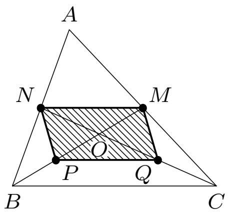

Рис. 30

Поскольку каждые две медианы делятся точкой пересечения в отношении $2 : 1$, считая от вершины треугольника, медиана, проведенная из вершины A, должна разделит каждую из медиан BM и CN в таком отношении, а значит, должна пройти через точку O. Что и требовалось доказать.

Пример 1. Докажите, что отрезок, соединяющий середины сторон AB и AC треугольника ABC, и медиана, проведенная из вершины A, делят друг друга пополам.

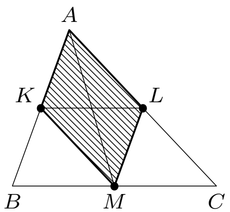

Рис. 31

Решение. Пусть AM — медиана треугольника ABC, точки K и L — середины сторон AB и AC соответственно (рис. 31). По теореме о средней линии треугольника $LM \parallel AB$ и $KM \parallel AC$, поэтому противолежащие стороны четырехугольника $AKML$ попарно параллельны. Значит, $AKML$ — параллелограмм. Его диагонали AM и KL делятся точкой пересечения пополам.

Пример 2. BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC. На продолжении медианы CC_1 за точку C отложен отрезок C_1C_2, равный $\frac{1}{3}CC_1$. Оказалось, что $C_2B_1 = AB_1$. Докажите, что медианы CC_1 и BB_1 взаимно перпендикулярны.

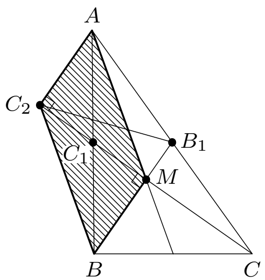

Рис. 32

Решение. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC (рис. 32). По теореме о медианах треугольника $MC_1 = \frac{1}{3}CC_1 = C_1C_2$. Поэтому диагонали AB и C_2M четырехугольника $AMBC_2$ делятся точкой пересечения пополам.

Значит, $AMBC_2$ — параллелограмм, поэтому $AC_2 \parallel BM$. С другой стороны, медиана C_2B_1 треугольника AC_2C равна половине стороны AC, значит, треугольник AC_2C прямоугольный, $\angle AC_2C = 90°$, а так как $AC_2 \parallel BM$, то $\angle BMC_1 = 90°$.

Пример 3. Точки K, L, M и N — середины сторон соответственно AB, BC, CD и DE пятиугольника $ABCDE$, а точки P и Q — середины отрезков соответственно KM и LN. Докажите, что $PQ \parallel AE$ и $PQ = \frac{1}{4}AE$.

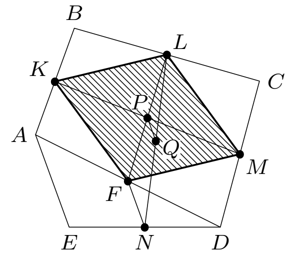

Рис. 33

Решение. Пусть F — середина диагонали AD (рис. 33). Тогда четырехугольник $KLMF$ — параллелограмм. Его диагональ LF проходит через середину P второй диагонали KM и делится ею пополам, поэтому PQ — средняя линия треугольника LFN. С другой стороны, FN — средняя линия треугольника ADE, следовательно,

$$PQ \parallel FN \parallel AE \quad \text{и} \quad PQ = \frac{1}{2}FN = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}AE\Big) = \frac{1}{4}AE.$$

Задачи первого уровня

2.64. Докажите, что три средние линии разбивают треугольник на четыре равных треугольника.

2.65. Дан треугольник с периметром, равным 24. Найдите периметр треугольника с вершинами в серединах сторон данного.

2.66. Стороны треугольника равны a и b. Через середину третьей стороны проведены прямые, параллельные двум другим сторонам. Найдите периметр полученного четырехугольника.

2.67. Постройте треугольник по серединам трех его сторон.

2.68^0. Докажите, что середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

2.69. Дан четырехугольник, сумма диагоналей которого равна 18. Найдите периметр четырехугольника с вершинами в серединах сторон данного.

2.70. Найдите периметр четырехугольника с вершинами в серединах сторон прямоугольника с диагональю, равной 8.

2.71. Найдите стороны и углы четырехугольника с вершинами в серединах сторон ромба, диагонали которого равны 6 и 10.

2.72. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна отрезку, соединяющему середины катетов.

2.73. Острый угол A ромба $ABCD$ равен 45°, проекция стороны AB на сторону AD равна 12. Найдите расстояние от центра ромба до стороны CD.

2.74. Расстояние между серединами взаимно перпендикулярных хорд AC и BC некоторой окружности равно 10. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения хорд.

2.75. Расстояние от середины хорды BC до диаметра AB равно 1. Найдите хорду AC, если $\angle BAC = 30^\circ$.

2.76. Середины сторон выпуклого пятиугольника последовательно соединены отрезками. Найдите периметр полученного пятиугольника, если сумма всех диагоналей данного равна a.

2.77. Две окружности пересекаются в точках A и D. Проведены диаметры AB и AC этих окружностей. Найдите $BD+DC$, если расстояние между центрами окружностей равно a и центры окружностей лежат по разные стороны от общей хорды.

2.78. Точки M и N расположены соответственно на сторонах AB и AC треугольника ABC, причем $BM = 3AM$ и $CN = 3AN$. Докажите, что $MN \parallel BC$ и найдите MN, если $BC = 12$.

Задачи второго уровня

2.79. Две прямые, проходящие через точку C, касаются окружности в точках A и B. Может ли прямая, проходящая через середины отрезков AC и BC, касаться этой окружности?

2.80. Сторона треугольника равна a. Найдите отрезок, соединяющий середины медиан, проведенных к двум другим сторонам.

2.81. Найдите геометрическое место середин всех отрезков, один конец которых лежит на данной прямой, а второй совпадает с данной точкой, не лежащей на этой прямой.

2.82. Докажите, что середины двух противоположных сторон любого четырехугольника без параллельных сторон и середины его диагоналей являются вершинами параллелограмма.

2.83. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, равны. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны.

2.84. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, перпендикулярны. Докажите, что диагонали четырехугольника равны.

2.85. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины сторон AB и CD, равен 1. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей AC и BD.

2.86. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен отрезку, соединяющему середины сторон AD и BC. Найдите угол, образованный продолжениями сторон AB и CD.

2.87. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры AM и AP на биссектрисы внешних углов B и C. Найдите отрезок PM, если периметр треугольника ABC равен 10.

2.88. Окружность проходит через середины гипотенузы AB и катета BC прямоугольного треугольника ABC и касается катета AC. В каком отношении точка касания делит катет AC?

2.89. Две медианы треугольника равны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

2.90. Постройте параллелограмм по вершине и серединам сторон, не содержащих эту вершину.

2.91. Докажите, что сумма трех медиан треугольника меньше периметра, но больше трех четвертей периметра треугольника.

2.92. Точки M и N — середины соседних сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые DM и BN пересекаются на диагонали AC.

2.93. Точки M и N — середины соседних сторон BC и CD

параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AM и AN делят диагональ BD на три равные части.

2.94. Высоты остроугольного треугольника ABC, проведенные из вершин B и C, равны 7 и 9, а медиана AM равна 8. Точки P и Q симметричны точке M относительно сторон AC и AB соответственно. Найдите периметр четырехугольника $APMQ$.

2.95. Постройте треугольник по высотам, проведенным из двух вершин, и медиане, проведенной из третьей.

2.96. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что середина отрезка MN лежит на средней линии треугольника ABC, параллельной его основанию.

2.97. С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок на три равные части.

2.98. Постройте треугольник по стороне и медианам, проведенным к двум другим сторонам.

2.99. Постройте треугольник по трем медианам.

2.100. Докажите признак равенства треугольников по трем медианам.

2.101. Точки A_1, B_1 и C_1 симметричны произвольной точке O относительно середин сторон соответственно BC, AC и AB треугольника ABC. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ равен треугольнику ABC.

2.102. Точки A_1, B_1 и C_1 — образы произвольной точки O при симметрии относительно середин сторон соответственно BC, AC и AB треугольника ABC. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

2.103. В четырехугольнике $ABCD$ точка E — середина AB, F — середина CD. Докажите, что середины отрезков AF, CE, BF и DE являются вершинами параллелограмма.

2.104. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ втрое больше диагонали BD и пересекается с ней под углом в 60°. Найдите отрезок, соединяющий вершину D с серединой стороны BC, если $AC = 24$, а угол BDC — тупой.

2.105. Сторона AB треугольника ABC больше стороны AC, а $\angle A = 40^\circ$. Точка D лежит на стороне AB, причем $BD = AC$. Точки M и N — середины отрезков BC и AD соответственно. Найдите угол BNM.

2.106. В выпуклом четырехугольнике прямая, проходящая через середины двух противоположных сторон, образует равные углы с диагоналями четырехугольника. Докажите, что диагонали равны.

2.107. Четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность с центром O. Найдите расстояние от точки O до стороны AB, если известно, что $CD = a$.

2.108^0. Докажите, что расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот вдвое больше, чем расстояние от центра описанного круга до противоположной стороны.

2.109. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что расстояние между серединами отрезков BC и AH равно радиусу окружности, описанной около треугольника ABC.

Задачи третьего уровня

2.110. Постройте треугольник, зная три точки, симметричные центру его описанной окружности относительно сторон.

2.111. Постройте пятиугольник по серединам его сторон.

2.112. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, перпендикулярные противоположным сторонам CD и CB соответственно. Докажите, что эти прямые и прямая AC имеют общую точку.

2.113. Два равносторонних треугольника ABC и CDE расположены по одну сторону от прямой AE и имеют единственную общую точку C. Пусть M, N и K — середины отрезков BD, AC и CE соответственно. Докажите, что треугольник MNK равносторонний.

2.114. Внутри треугольника ABC взята точка P так, что $\angle PAC = \angle PBC$. Из точки P на стороны BC и CA опущены перпендикуляры PM и PK соответственно. Пусть D — середина стороны AB. Докажите, что $DK = DM$.

§ 2.3. Трапеция. Теорема Фалеса. Теорема о пропорциональных отрезках

Трапецией называется четырехугольник, у которого две противоположные стороны (основания) параллельны, а две другие (боковые стороны) нет.

Теорема о средней линии трапеции. *Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.*

Трапеция называется *равнобокой*[1], если ее боковые стороны равны.

Теорема о пропорциональных отрезках. *Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от его сторон пропорциональные отрезки.*

Теорема Фалеса. *Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной из его сторон равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.*

Пример 1. Диагонали равнобокой трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что средняя линия трапеции равна высоте.

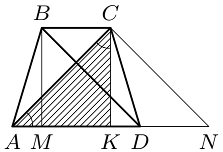

Рис. 34

Решение. Пусть CK — высота равнобокой трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD и взаимно перпендикулярными диагоналями AC и BD (рис. 34). Предположим, что $AD > BC$. Если BM — еще одна высота трапеции, то

$$MK = BC,$$

$$DK = AM = \frac{1}{2}(AD - MK) = (AD - BC),$$

$$AK = AD - DK = AD - \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{1}{2}(AD + BC),$$

т. е. отрезок AK равен средней линии трапеции $ABCD$.

[1] Иногда вместо «равнобокая трапеция» говорят «равнобедренная трапеция» или «равнобочная трапеция».

Докажем теперь, что $\angle CAK = 45°$. Отсюда будет следовать, что катеты прямоугольного треугольника AKC равны между собой, т. е. $CK = AK$. Через вершину C проведем прямую параллельно диагонали BD. Пусть N — точка пересечения этой прямой с продолжением основания AD. Тогда $CN = BD = AC$ и $\angle ACN = 90°$. Поэтому ACN — равнобедренный прямоугольный треугольник. Значит, $\angle CAK = \angle CAN = \angle ANC = 45°$. Следовательно, $CK = AK = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Пример 2. Биссектрисы углов при одном основании трапеции пересекаются на втором ее основании. Докажите, что второе основание равно сумме боковых сторон.

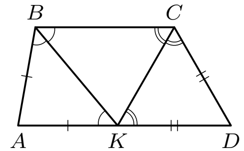

Рис. 35

Решение. Пусть биссектрисы углов при вершинах B и C трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке K, лежащей на основании AD (рис. 35). Тогда $\angle AKB = \angle CBK = \angle ABK$, поэтому треугольник ABK равнобедренный, $AK = AB$. Аналогично, $DK = CD$. Следовательно, $AD = AK + DK = AB + CD$.

Пример 3. Сумма углов при одном из оснований трапеции равна $90°$. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.

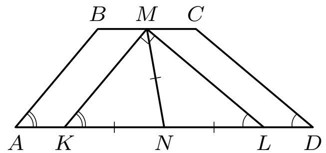

Рис. 36

Решение. Пусть M и N — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$ ($AD = a$, $BC = b$, $a > b$) и $\angle A + \angle D = 90°$ (рис. 36). Через точку M проведем прямые, параллельные AB и CD. Пусть K и L — точки их пересечения с основанием AD. Тогда $\angle MKL + \angle MLK = \angle A + \angle D = 90°$. Поэтому $\angle KML = 90°$ и $MN = \frac{1}{2}KL$ как медиана прямоугольного треугольника KML. Тогда

$$KL = AD - AK - LD = a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b = a - b.$$

Следовательно, $MN = \frac{1}{2}KL = \frac{1}{2}(a - b)$.

Задачи первого уровня

2.115^0. Докажите следующие утверждения:

а) углы при основании равнобокой трапеции равны;

б) если углы при одном из оснований трапеции равны, то она равнобокая;

в) диагонали равнобокой трапеции равны;

г) если диагонали трапеции равны, то она равнобокая.

2.116. Докажите, что сумма противоположных углов равнобокой трапеции равна 180°. Верно ли обратное: если сумма противоположных углов трапеции равна 180°, то она равнобокая?

2.117. Наибольший угол прямоугольной трапеции равен 120°, а бо́льшая боковая сторона равна c. Найдите разность оснований.

2.118^0. Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из конца C меньшего основания BC равнобокой трапеции $ABCD$ на ее большее основание AD. Найдите DP и AP, если основания трапеции равны a и b ($a > b$).

2.119. Найдите углы и стороны четырехугольника с вершинами в серединах сторон равнобокой трапеции, диагонали которой равны 10 и пересекаются под углом, равным 40°.

2.120. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна 5. Найдите отрезок, соединяющий середины оснований.

2.121. Высота равнобокой трапеции, проведенная из конца меньшего основания, делит ее большее основание на отрезки, равные 4 и 8. Найдите основания трапеции.

2.122. Найдите меньшее основание равнобокой трапеции, если высота, проведенная из конца меньшего основания, делит большее основание на отрезки, один из которых на 5 больше другого.

2.123. Боковая сторона равнобокой трапеции видна из точки пересечения диагоналей под углом, равным 60°. Найдите диагонали трапеции, если ее высота равна h.

2.124. В равнобокой трапеции острый угол равен 60°. Докажите, что меньшее основание равно разности большего основания и боковой стороны.

2.125. Диагональ равнобокой трапеции равна 10 и образует угол, равный 60°, с основанием трапеции. Найдите среднюю линию трапеции.

2.126. AB и BC — соответственно боковая сторона и меньшее основание трапеции $ABCD$. Известно, что $AB = 2{,}6$ и $BC = 2{,}5$. Какой из отрезков пересекает биссектриса угла A: основание BC или боковую сторону CD?

2.127. Расстояния от концов диаметра окружности до некоторой касательной равны a и b. Найдите радиус окружности.

2.128. Окружность касается всех сторон равнобокой трапеции. Докажите, что боковая сторона трапеции равна средней линии.

2.129. Окружность касается всех сторон трапеции. Докажите, что боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.

2.130. Боковые стороны трапеции равны 7 и 11, а основания — 5 и 15. Прямая, проведенная через вершину меньшего основания параллельно большей боковой стороне, отсекает от трапеции треугольник. Найдите его стороны.

Задачи второго уровня

2.131. Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам.

2.132. Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.

2.133. Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 3, а бо́льшая образует угол, равный 30°, с одним из оснований. Найдите это основание, если на нем лежит точка пересечения биссектрис углов при другом основании.

2.134. Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Могут ли прямые BN и DM быть параллельными?

2.135. Докажите, что биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются на ее средней линии.

2.136. Дана трапеция $ABCD$ с основанием AD. Биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке P, а при вершинах C и D — в точке Q. Докажите, что отрезок PQ равен полупериметру трапеции.

2.137. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Биссектрисы углов при вершинах A и B пересекаются в точке M, а биссектрисы углов при вершинах C и D — в точке N. Найдите MN, если известно, что $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $AD = d$.

2.138⁰. Основания трапеции равны a и b ($a > b$). Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.

2.139. Точка A лежит на одной из двух параллельных прямых, а точка B — на другой. Найдите геометрическое место середин отрезков AB.

2.140. Один из углов прямоугольной трапеции равен $120°$, большее основание равно 12. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей, если известно, что меньшая диагональ трапеции равна ее большему основанию.

2.141. Найдите отношение оснований трапеции, если ее средняя линия делится диагоналями на три равные части.

2.142. Боковая сторона трапеции равна одному основанию и вдвое меньше другого. Докажите, что вторая боковая сторона перпендикулярна одной из диагоналей трапеции.

2.143. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Одна из них равна 6, а вторая образует с основанием угол, равный $30°$. Найдите среднюю линию трапеции.

2.144. Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны $30°$ и $60°$. Найдите основания и меньшую боковую сторону трапеции.

2.145⁰. Точка M — середина отрезка AB. Точки A_1, M_1 и B_1 — проекции точек A, M и B на некоторую прямую. Докажите, что M_1 — середина отрезка A_1B_1.

2.146. На прямую, проходящую через вершину A треугольника ABC, опущены перпендикуляры BD и CE. Докажите, что середина стороны BC равноудалена от точек D и E.

2.147. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке K. Одна прямая касается этих окружностей в различных точках A и B, а вторая — соответственно в точках C и D. Общая касательная к окружностям, проходящая через точку C, пересекается с этими прямыми в точках M и N. Найдите MN, если $AC = a$, $BD = b$.

2.148. Одна из боковых сторон трапеции равна сумме оснований. Докажите, что биссектрисы углов при этой стороне пересекаются на другой боковой стороне.

2.149. Дана трапеция, в которую можно вписать окружность. Докажите, что окружности, построенные на боковых сторонах как на диаметрах, касаются друг друга.

2.150. Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон четырехугольника, равен полусумме двух других сторон. Докажите, что этот четырехугольник — трапеция или параллелограмм.

2.151. Окружность, построенная на большем основании трапеции как на диаметре, проходит через середины боковых сторон и касается меньшего основания. Найдите углы трапеции.

2.152. Окружность, построенная на меньшем основании трапеции как на диаметре, проходит через середины диагоналей и касается большего основания. Найдите углы трапеции.

Задачи третьего уровня

2.153. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ противоположные углы A и C прямые. На диагональ AC опущены перпендикуляры BE и DF. Докажите, что $CE = FA$.

2.154. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE. Из вершин B и C на прямую ED опущены перпендикуляры BF и CG. Докажите, что $EF = DG$.

2.155. Одним прямолинейным разрезом отрежьте от треугольника трапецию, у которой меньшее основание было бы равно сумме боковых сторон.

2.156. Существуют ли две трапеции, основания первой из которых соответственно равны боковым сторонам второй, а основания второй — боковым сторонам первой?

2.157. На отрезке AB взята точка C. Прямая, проходящая через точку C, пересекает окружности с диаметрами AC и BC в точках K и L, а также окружность с диаметром AB — в точках M и N. Докажите, что $KM = LN$.

§ 2.4. Теорема Пифагора

Теорема. *Косинус острого угла зависит только от градусной меры угла и не зависит от расположения и размеров прямоугольного треугольника.*

Средним геометрическим (*средним пропорциональным*) двух неотрицательных чисел называется квадратный корень из произведения этих чисел.

Теорема. *Каждый катет прямоугольного треугольника есть среднее геометрическое гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.*

Теорема Пифагора. *Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.*

Теорема. *Синус и тангенс острого угла зависят только от градусной меры угла и не зависят от расположения и размеров прямоугольного треугольника.*

Теорема. *Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу.*

Пример 1. Стороны треугольника равны 10, 17, и 21. Найдите высоту, проведенную к большей стороне.

Решение. Пусть AD — высота треугольника ABC, в котором $BC = 21$, $AB = 10$ и $AC = 17$ (рис. 37). Обозначим $BD = x$. Поскольку BC — наибольшая сторона треугольника, точка D лежит на отрезке BC, поэтому $CD = 21 - x$. Выразив AD^2 по теореме Пифагора из прямоугольных треугольников ABD и ACD, получим уравнение $100 - x^2 = 289 - (21 - x)^2$, откуда находим, что $BD = x = 6$. Следовательно, $AD^2 = AB^2 - BD^2 = 64$ и $AD = 8$.

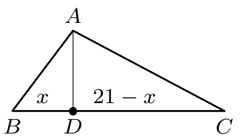

Рис. 37

Пример 2. В прямоугольный треугольник с гипотенузой a и острым углом 30° вписан прямоугольник, одна из сторон которого вдвое больше другой. Бóльшая сторона прямоугольника находится на гипотенузе, а противоположные ей вершины — на катетах. Найдите стороны прямоугольника.

Решение. Пусть вершины K и N прямоугольника $KLMN$ (рис. 38) расположены соответственно на катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC, вершины L и M — на гипотенузе AB, $AB = a$, $\angle B = 30^\circ$. Обозначим MN через x. Тогда

$$LM = 2x, \qquad MB = MN \operatorname{ctg} 30^\circ = x\sqrt{3},$$

$$AL = KL \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

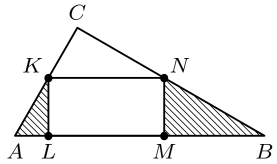

Рис. 38

Поскольку $AL + LM + MB = AB$, получим уравнение $\frac{x\sqrt{3}}{3} + 2x + x\sqrt{3} = a$. Откуда находим, что

$$MN = x = a\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right), \qquad LM = 2MN = a(2\sqrt{3} - 3).$$

Пример 3. Докажите, что в прямоугольном треугольнике проекции катетов на гипотенузу пропорциональны квадратам катетов.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c. Пусть проекции катетов на гипотенузу равны a_1 и b_1 соответственно. Тогда $a_1c = a^2$ и $b_1c = b^2$, откуда $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a^2}{b^2}$.

Пример 4. Дан треугольник со сторонами a, b и c. Докажите, что если медианы, проведенные к сторонам a и b, взаимно перпендикулярны, то $a^2 + b^2 = 5c^2$.

Решение. Пусть медианы AM и BN треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$ и $BC = a$ взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке P (рис. 39). Обозначим $PM = x$, $PN = y$. Тогда по теореме о медианах $AP = 2x$, $BP = 2y$. Применив теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам APN и BPM, получим: $x^2 + 4y^2 = \frac{b^2}{4}$, $4x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$. Поэтому $5x^2 + 5y^2 = \frac{a^2+b^2}{4}$, $x^2 + y^2 = \frac{a^2+b^2}{20}$. Из прямоугольного треугольника APB находим, что $c^2 = AB^2 = 4x^2 + 4y^2 = \frac{a^2+b^2}{5}$, откуда $a^2 + b^2 = 5c^2$.

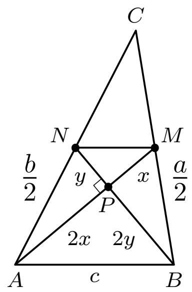

Рис. 39

Задачи первого уровня

2.158. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) известно, что $AB = 4$, $\angle A = 60°$. Найдите BC и AC.

2.159. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) известно, что $\angle A = \alpha$, $BC = a$. Найдите гипотенузу и второй катет.

2.160. Найдите высоту прямоугольного треугольника, проведенную из вершины прямого угла, если гипотенуза равна 8, а один из острых углов равен $60°$.

2.161. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен $120°$, а основание равно 8. Найдите боковую сторону.

2.162. Найдите диагональ прямоугольника со сторонами 5 и 12.

2.163. Основания прямоугольной трапеции равны 6 и 8. Один из углов при меньшем основании равен $120°$. Найдите диагонали трапеции.

2.164. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки, равные a и b. Найдите катеты.

2.165. Высота параллелограмма, проведенная из вершины тупого угла, равна a и делит сторону пополам. Острый угол параллелограмма равен $30°$. Найдите диагонали параллелограмма.

2.166. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ перпендикулярна стороне AB. Высота BM параллелограмма делит сторону AD на отрезки $DM = 9$ и $AM = 4$. Найдите стороны и диагонали параллелограмма.

2.167. Найдите расстояние от центра окружности радиуса 10 до хорды, равной 12.

2.168. Прямая, проходящая через точку M, удаленную от центра окружности радиуса 10 на расстояние, равное 26, касается окружности в точке A. Найдите AM.

2.169. Прямые, касающиеся окружности с центром O в точках A и B, пересекаются в точке M. Найдите хорду AB, если отрезок MO делится ею на отрезки, равные 2 и 18.

2.170. Найдите сторону квадрата, вписанного в окружность радиуса 8.

2.171. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция второго катета на гипотенузу равна 16. Найдите гипотенузу и второй катет.

2.172. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 12 и делит прямой угол в отношении $1 : 2$. Найдите стороны треугольника.

2.173. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 и 16. Найдите медиану, проведенную к гипотенузе.

2.174. Найдите высоту трапеции со сторонами, равными 10, 10, 10 и 26.

2.175. Найдите высоту равнобедренного треугольника, проведенную к основанию, если стороны треугольника равны 10, 13 и 13.

2.176. Найдите высоту, а также радиусы вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника со стороной, равной a.

2.177. Вершина M правильного треугольника ABM со стороной a расположена на стороне CD прямоугольника $ABCD$. Найдите диагональ прямоугольника $ABCD$.

2.178. Дан отрезок, равный 1. Постройте отрезки, равные $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.

2.179. Даны отрезки a и b. Постройте отрезки $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{a^2 - b^2}$.

2.180^0. Докажите, что произведение стороны треугольника на проведенную к ней высоту для данного треугольника постоянно.

2.181. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 и 16. Найдите высоту, проведенную из вершины прямого угла.

2.182. Найдите высоту равнобедренного треугольника, проведенную к боковой стороне, если основание равно a, а боковая сторона равна b.

2.183. Точка M расположена на стороне CD квадрата $ABCD$ с центром O, причем $CM : MD = 1 : 2$. Найдите стороны треугольника AOM, если сторона квадрата равна 6.

2.184. Дан треугольник со сторонами 13, 14 и 15. Найдите высоту, проведенную к большей стороне.

2.185⁰. Сформулируйте теорему, обратную теореме Пифагора. Верна ли она?

2.186. Найдите высоту трапеции, боковые стороны которой равны 6 и 8, а основания равны 4 и 14.

2.187. Высота ромба, проведенная из вершины тупого угла, делит его сторону на отрезки длиной a и b. Найдите диагонали ромба.

2.188. Одно основание прямоугольной трапеции вдвое больше другого, а боковые стороны равны 4 и 5. Найдите диагонали трапеции.

2.189. В прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что одна из его сторон находится на гипотенузе. Боковые отрезки гипотенузы равны a и b. Найдите сторону квадрата.

2.190. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан ромб со стороной, равной 6, так, что угол в 60° у них общий, а остальные вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найдите стороны треугольника.

2.191. Две вершины квадрата расположены на основании равнобедренного треугольника, а две другие — на его боковых сторонах. Найдите сторону квадрата, если основание треугольника равно a, а угол при основании равен 30°.

2.192. Найдите диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12, если известно, что центр ее описанной окружности лежит на большем основании.

2.193. Хорда AC окружности радиуса R образует с диаметром AB угол α. Найдите расстояние от точки C до диаметра AB.

2.194. Диагональ равнобокой трапеции равна a, а средняя линия равна b. Найдите высоту трапеции.

2.195. Прямые, содержащие боковые стороны трапеции, пересекаются под прямым углом. Бо́льшая боковая сторона трапеции равна 8, а разность оснований равна 10. Найдите меньшую боковую сторону.

2.196. Радиус окружности, вписанной в ромб, равен r, а острый угол ромба равен α. Найдите сторону ромба.

2.197. Отрезок, соединяющий центры двух пересекающихся окружностей, делится их общей хордой на отрезки, равные 5 и 2. Найдите общую хорду, если известно, что радиус одной окружности вдвое больше радиуса другой.

2.198. Из точки M проведены касательные MA и MB к окружности с центром O (A и B — точки касания). Найдите радиус окружности, если $\angle AMB = \alpha$ и $AB = a$.

Задачи второго уровня

2.199. Найдите основание равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна a, а высота, опущенная на основание, равна отрезку, соединяющему середину основания с серединой боковой стороны.

2.200. Сторона треугольника равна 2, прилежащие к ней углы равны 30° и 45°. Найдите остальные стороны треугольника.

2.201. Косинус угла при основании равнобедренного треугольника равен $\frac{3}{5}$, высота, опущенная на основание, равна h. Найдите высоту, опущенную на боковую сторону.

2.202. Вершины M и N равностороннего треугольника BMN лежат соответственно на сторонах AD и CD квадрата $ABCD$ со стороной a. Найдите MN.

2.203. Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равен R. Угол при основании равен α. Найдите стороны треугольника.

2.204. Даны отрезки a и b. Постройте отрезок $\sqrt{ab}$.

2.205. Высота CD треугольника ABC делит сторону AB на отрезки AD и BD, причем $AD \cdot BD = CD^2$. Верно ли, что треугольник ABC прямоугольный?

2.206. Найдите $\sin 15^\circ$ и $\operatorname{tg} 15^\circ$.

2.207. Медианы, проведенные к катетам прямоугольного треугольника, равны a и b. Найдите гипотенузу треугольника.

2.208. Две стороны треугольника равны a и b. Медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найдите третью сторону треугольника.

2.209. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке K. Найдите CK, если $BC = a$ и $AC = b$.

2.210. На боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность, делящая вторую боковую сторону на отрезки, равные a и b. Найдите основание треугольника.

2.211. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке D, причем $AD : DB = 1 : 3$. Высота, опущенная на гипотенузу, равна 3. Найдите катет BC.

2.212. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота из вершины C прямого угла. На этой высоте как на диаметре построена окружность. Известно, что эта окружность высекает на катетах отрезки, равные 12 и 18. Найдите катеты треугольника ABC.

2.213. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна a и образует угол α с медианой, проведенной из той же вершины. Найдите катеты треугольника.

2.214. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12. Найдите катеты треугольника.

2.215. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найдите все стороны трапеции, если ее высота равна 12, а биссектрисы равны 15 и 13.

2.216. Диагональ AC равнобокой трапеции $ABCD$ равна a и образует с бо́льшим основанием AD и боковой стороной AB углы α и β соответственно. Найдите основания трапеции.

2.217. В трапеции $ABCD$ основание $AD = 2$, основание $BC = 1$. Боковые стороны $AB = CD = 1$. Найдите диагонали трапеции.

2.218. Основания трапеции равны 3 и 5, одна из диагоналей перпендикулярна боковой стороне, а другая делит пополам угол при большем основании. Найдите высоту трапеции.

2.219. Боковая сторона AD и основание CD трапеции $ABCD$ равны a, основание AB равно $2a$, а диагональ AC равна b. Найдите боковую сторону BC.

2.220. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен 21, а катет BC равен 28. Окружность, с центром на гипотенузе AB, касается обоих катетов. Найдите радиус окружности.

2.221. Через середину гипотенузы прямоугольного треугольника проведен к ней перпендикуляр. Отрезок этого перпендикуляра, заключенный внутри треугольника, равен c, а отрезок, заключенный между одним катетом и продолжением другого, равен $3c$. Найдите гипотенузу.

2.222⁰. Окружность, вписанная в трапецию, делит ее боковую сторону на отрезки a и b. Найдите радиус окружности.

2.223. Окружность радиуса R вписана в прямоугольную трапецию, меньшее основание которой равно $\frac{4R}{3}$. Найдите остальные стороны трапеции.

2.224. Даны окружности радиусов r и R $(R > r)$. Расстояние между их центрами равно a $(a > R+r)$. Найдите отрезки общих внешних и общих внутренних касательных, заключенные между точками касания.

2.225. Окружности радиусов r и R $(R > r)$ касаются внешним образом в точке K. К ним проведены две общие внешние касательные. Их точки касания с меньшей окружностью — A и D, с большей — B и C соответственно.

а) Найдите AB и отрезок MN общей внутренней касательной, заключенный между внешними касательными.

б) Докажите, что углы AKB и O_1MO_2 прямые (O_1 и O_2 — центры окружностей).

в) Найдите радиусы окружностей, касающихся обеих данных окружностей и их общей внешней касательной.

2.226. В трапеции $ABCD$ меньшая диагональ BD перпендикулярна основаниям AD и BC, сумма острых углов A и C равна $90°$. Основания $AD = a$, $BC = b$. Найдите боковые стороны AB и CD.

2.227. Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны $30°$ и $60°$. Найдите высоту трапеции.

2.228. Стороны параллелограмма равны a и b, а угол между ними равен α. Найдите стороны и диагонали четырехугольника, образованного пересечением биссектрис внутренних углов параллелограмма.

2.229. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Найдите CN, если катеты равны 1 и 4.

2.230. Основание CD, диагональ BD и боковая сторона AD трапеции $ABCD$ равны p. Боковая сторона BC равна q. Найдите диагональ AC.

2.231. Хорды AB и CD окружности радиуса R пересекаются под прямым углом. Найдите BD, если $AC = a$.

2.232. На гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами a и b во внешнюю сторону построен квадрат. Найдите расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра квадрата.

2.233. Высоты треугольника равны 12, 15 и 20. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

2.234. В круге проведены два диаметра AB и CD, M — некоторая точка. Известно, что $AM = 15$, $BM = 20$ и $CM = 24$. Найдите DM.

2.235. Катет прямоугольного треугольника равен 2, а противолежащий ему угол равен 30°. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники, на которые данный треугольник делится медианой, проведенной из вершины прямого угла.

2.236. Окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух его других сторон, называется *вневписанной* окружностью треугольника.

Найдите расстояние между центром вписанной окружности прямоугольного треугольника с углом 30° и центром его вневписанной окружности, касающейся меньшего катета, если радиус вписанной окружности равен r.

2.237. Найдите радиусы вписанной и вневписанных окружностей треугольника со сторонами: а) 5, 12, 13; б) 10, 10, 12.

2.238. В треугольнике PQR угол QRP равен 60°. Найдите расстояние между точками касания со стороной QR окружности радиуса 2, вписанной в треугольник, и окружности радиуса 3, касающейся продолжений сторон PQ и PR.

2.239. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен $\sqrt{3} - 1$. Угол BAC этого треугольника равен 60°, а радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC, равен $\sqrt{3}+1$. Найдите углы ABC и ACB данного треугольника.

2.240. Дана окружность с центром в точке O и радиусом 2. Из конца отрезка OA, пересекающегося с окружностью в точке M, проведена касательная AK к окружности (K — точка касания), $\angle OAK = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, касающейся отрезков AK, AM и дуги MK.

2.241. К двум окружностям, касающимся внешним образом в точке C, проведена общая внешняя касательная, A и B — точки касания. Найдите радиусы окружностей, если $AC = 6$, $BC = 8$.

2.242. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R. Его диагонали взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке P. Найдите

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 \quad \text{и} \quad AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2.$$

2.243. Три окружности радиусов 1, 2 и 3 касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания этих окружностей.

Задачи третьего уровня

2.244. Вершины прямоугольника, не являющегося квадратом, расположены по одной на каждой стороне некоторого квадрата. Докажите, что стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата.

2.245. Найдите геометрическое место точек M, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек A и B постоянна.

2.246. Найдите геометрическое место точек, касательные из которых, проведенные к двум данным окружностям, равны между собой.

2.247. Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны тогда и только тогда, когда $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

2.248. Используя результат предыдущей задачи, докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

2.249. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагонали этого четырехугольника взаимно перпендикулярны. Найдите его площадь, если радиус описанной окружности равен R и $BC = 2AB$.

2.250. Прямоугольный треугольник ABC ($\angle A = 90°$) и два квадрата $BEFC$ и $AMNB$ расположены так, что точки E и A лежат по разные стороны от прямой BC, а точки M и C — по разные стороны от прямой AB. Найдите расстояние между центрами квадратов, если $AB = b$, $AC = a$.

2.251. На высотах BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC взяты точки B_2 и C_2 так, что $\angle AB_2C = \angle AC_2B = 90°$. Докажите, что $AB_2 = AC_2$.

§ 2.5. Декартовы координаты на плоскости

Если точка $M(x_0; y_0)$ — середина отрезка с концами в точках $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$ и $y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}$.

Расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ равно

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Окружность радиуса R с центром в точке $A(a; b)$ имеет уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Любая прямая в декартовых координатах xy имеет уравнение $ax + by + c = 0$, где a, b и c — некоторые числа, причем хотя бы одно из чисел a и b отлично от нуля.

Любая прямая, не параллельная оси ординат, имеет уравнение $y = kx + l$. Число k называется *угловым коэффициентом* прямой. Угловой коэффициент прямой с точностью до знака равен тангенсу острого угла, который образует прямая с осью Ox.

Пример 1. Даны точки $A(-9; 2)$, $B(1; 6)$, $C(7; 3)$ и $D(-3; -1)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Решение. Координаты середины диагонали AC равны $\frac{1}{2}(-9 + 7) = -1$ и $\frac{1}{2}(2 + 3) = \frac{5}{2}$, а координаты середины отрезка BD равны $\frac{1}{2}(1 - 3) = -1$ и $\frac{1}{2}(6 - 1) = \frac{5}{2}$. Поэтому диагонали четырехугольника $ABCD$ имеют общую середину, т. е. делятся точкой пересечения пополам. Следовательно, $ABCD$ — параллелограмм.

Пример 2. Докажите, что любая прямая, не проходящая через начало координат и не параллельная осям координат, может быть задана уравнением $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$. Каков геометрический смысл чисел p и q?

Решение. Если прямая, не проходящая через начало координат и не параллельная осям координат, задана уравнением $ax+by+c = 0$, то числа a, b и c отличны от 0. Разделив обе части этого уравнения на c, после очевидных преобразований получим уравнение $\frac{x}{-c/a} + \frac{y}{-c/b} = 1$. Обозначив $-c/a = p$ и $-c/b = q$, получим уравнение $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

Если $x = 0$, то $y = q$, т. е. данная прямая пересекает ось ординат в точке $(0; q)$. Если $y = 0$, то $x = p$, т. е. прямая пересекает ось абсцисс в точке $(p; 0)$.

Пример 3. Даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек M, для которых $AM = 2BM$.

Решение. Пусть расстояние между данными точками A и B равно a. Поместим начало координат в точку A, ось абсцисс направим вдоль луча AB, а ось ординат — вдоль луча AY, перпендикулярного AB (рис. 40). Тогда точка A имеет координаты $(0; 0)$, а точка B — $(a; 0)$. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка плоскости. Условие $AM = 2BM$ равносильно условию $AM^2 = 4BM^2$ или $x^2 + y^2 = 4(x-a)^2+4y^2$. После раскрытия скобок, приведения подобных и выделения полного квадрата получим уравнение

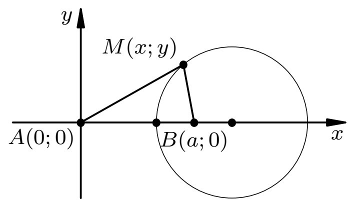

Рис. 40

$$\left(x - \frac{4}{3}a\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}a^2.$$

Это уравнение окружности с центром в точке $\left(\frac{4}{3}a; 0\right)$ и радиусом $\frac{2}{3}a$.

Ответ. Окружность.

Задачи первого уровня

2.252. Даны точки $A(-1;5)$ и $B(3;-7)$. Найдите расстояние от начала координат до середины отрезка AB.

2.253. Даны точки $A(3;5)$, $B(-6;-2)$ и $C(0;-6)$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

2.254. Даны точки $A(2;4)$, $B(6;-4)$ и $C(-8;-1)$. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

2.255. Докажите, что точки $A(-1;-2)$, $B(2;-1)$ и $C(8;1)$ лежат на одной прямой.

2.256. Даны точки $A(-2;1)$, $B(2;5)$ и $C(4;-1)$. Точка D лежит на продолжении медианы AM за точку M, причем четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм. Найдите координаты точки D.

2.257. Дана точка $M(-1;3)$. Найдите координаты точки, симметричной точке M относительно: а) оси Ox; б) оси Oy; в) начала координат; г) точки $K(3;1)$; д) биссектрисы I и III координатных углов; е) биссектрисы II и IV координатных углов.

2.258. Даны точки $A(-2;0)$, $B(1;6)$, $C(5;4)$ и $D(2;-2)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.

2.259. Даны точки $A(0;-2)$, $B(-2;1)$, $C(0;0)$ и $D(2;-9)$. Укажите те из них, которые лежат на прямой $2x-3y+7=0$.

2.260. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3;1)$ параллельно: а) оси Ox; б) оси Oy.

2.261. Найдите расстояние между точкой $A(1;7)$ и точкой пересечения прямых $x-y-1=0$ и $x+3y-12=0$.

2.262. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3;2)$ параллельно прямой $2x-3y+4=0$.

2.263. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x+2y-5=0$ и $x-3y+2=0$ параллельно оси ординат.

2.264. Найдите координаты вершин треугольника, стороны которого лежат на прямых $2x+y-6=0$, $x-y+4=0$ и $y+1=0$.

2.265. Даны точки $A(-2;2)$, $B(-2;-2)$ и $C(6;6)$. Составьте уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника ABC.

2.266. Даны точки $A(4;1)$, $B(-8;0)$ и $C(0;-6)$. Составьте уравнение прямой, на которой лежит медиана AM треугольника ABC.

2.267. Окружность с центром в точке $M(3;1)$ проходит через начало координат. Составьте уравнение окружности.

2.268. Найдите радиус и координаты центра окружности, заданной уравнением: а) $(x-3)^2+(y+2)^2=16$; б) $x^2+y^2-2(x-3y)-15=0$; в) $x^2+y^2=x+y+\frac{1}{2}$.

2.269. Даны точки $A(0;0)$, $B(4;0)$ и $C(0;6)$. Составьте уравнение окружности, описанной около треугольника ABC.

2.270. Найдите длину хорды, которую на прямой $y=3x$ высекает окружность $(x+1)^2+(y-2)^2=25$.

2.271. Докажите, что прямая $3x-4y+25=0$ касается окружности $x^2+y^2=25$, и найдите координаты точки касания.

2.272. Составьте уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $A(2;1)$.

2.273. Найдите координаты точек пересечения окружностей

$$(x-2)^2+(y-10)^2=50 \quad \text{и} \quad x^2+y^2+2(x-y)-18=0.$$

2.274. Даны точки $A(0;0)$, $B(-2;1)$, $C(3;3)$, $D(2;-1)$ и окружность $(x-1)^2+(y+3)^2=25$. Выясните, где расположены эти точки: на окружности, внутри или вне окружности.

Задачи второго уровня

2.275. Даны точки $A(-6;1)$ и $B(4;6)$. Найдите координаты точки C, делящей отрезок AB в отношении $2:3$, считая от точки A.

2.276. Даны точки $A(5;5)$, $B(8;-3)$ и $C(-4;1)$. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC.

2.277. Даны точки $A(-6;-1)$, $B(1;2)$ и $C(-3;-2)$. Найдите координаты вершины M параллелограмма $ABMC$.

2.278. Даны точки $A(-1;3)$, $B(1;-2)$, $C(6;0)$ и $D(4;5)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — квадрат.

2.279$^{\mathbf{0}}$. Известно, что прямая с угловым коэффициентом k проходит через точку $M(x_0;y_0)$. Докажите, что ее уравнение имеет вид $y-y_0=k(x-x_0)$.

2.280⁰. Известно, что прямая проходит через точки $M(x_1; y_1)$ и $N(x_2; y_2)$, причем $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$. Докажите, что ее уравнение имеет вид $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

2.281. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки $A(-2; 1)$, $B(9; 3)$ и $C(1; 7)$.

2.282. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(0; 7)$ и касающейся окружности $(x-15)^2 + (y-2)^2 = 25$.

2.283⁰. Докажите, что прямые, заданные уравнениями $y = k_1x + l_1$ и $y = k_2x + l_2$, перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1k_2 = -1$.

2.284. Даны точки $A(-2; 3)$, $B(2; 6)$, $C(6; -1)$ и $D(-3; -4)$. Докажите, что диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны.

2.285. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1; 4)$ перпендикулярно прямой $x - 2y + 4 = 0$.

2.286. Даны точки $A(6; 1)$, $B(-5; -4)$, $C(-2; 5)$. Составьте уравнение прямой, на которой лежит высота треугольника ABC, проведенная из вершины A.

2.287. Даны точки $A(5; -1)$, $B(4; -8)$, $C(-4; -4)$. Найдите координаты точки пересечения высот треугольника ABC.

2.288. С помощью метода координат докажите, что суммы квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до противоположных вершин прямоугольника равны между собой.

2.289. С помощью метода координат найдите геометрическое место точек плоскости, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна.

2.290. Даны точки A, B и положительное число k. Найдите геометрическое место точек M, для которых $AM = kBM$.

2.291. Даны точки A, B и положительное число d. Найдите геометрическое место точек M, для которых $AM^2 + BM^2 = d$.

2.292. Докажите, что расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, равно $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2.293. Найдите расстояние между параллельными прямыми $y = -3x + 5$ и $y = -3x - 4$.

2.294. Составьте уравнение окружности с центром в точке $M(3; 2)$, касающейся прямой $y = 2x + 6$.

2.295. Точка M лежит на прямой $3x - 4y + 34 = 0$, а точка N — на окружности $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$. Найдите наименьшее расстояние между точками M и N.

2.296. Даны точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и неотрицательное число λ. Найдите координаты точки M луча AB, для которой $AM : AB = \lambda$.

Задачи третьего уровня

2.297. Даны точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и прямая $ax + by + c = 0$. Известно, что $ax_1 + by_1 + c > 0$, а $ax_2 + by_2 + c < 0$. Докажите, что точки A и B расположены по разные стороны от этой прямой.

2.298. Найдите наименьшее значение выражения $|a + b| + \sqrt{(a-1)^2 + (b-3)^2}$.

2.299. Две окружности касаются внешним образом в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает окружности в точках B и C. Найдите геометрическое место середин отрезков BC.

2.300. На координатной плоскости нарисовали график функции $y = x^2$, а затем стерли оси координат. Восстановите их с помощью циркуля и линейки.

2.301. Назовем точку плоскости рациональной, если ее обе координаты — рациональные числа. Докажите, что если на окружности $x^2 + y^2 = R$ (R — целое) есть хотя бы одна рациональная точка, то на этой окружности бесконечно много рациональных точек.

§ 2.6. Движение

Преобразование одной фигуры в другую называется *движением*, если оно сохраняет расстояние между точками.

При движении прямые переходят в прямые, лучи — в лучи, отрезки — в отрезки. При движении сохраняются углы между лучами.

Симметрия относительно точки, симметрия относительно прямой, поворот, параллельный перенос являются движениями.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

Точка X' называется *симметричной* точке X относительно точки O, если O — середина отрезка XX'.

Теорема. *При центральной симметрии каждый луч переходит в противоположно направленный с ним луч.*

Доказательство. Пусть точка A — начало луча l, X — произвольная точка этого луча, A_1 и X_1 — образы точек A и X при симметрии относительно точки O (рис. 41). Из определения центральной симметрии следует, что точки X и X_1 лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AA_1, и треугольники A_1OX_1 и AOX равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, прямые AX и A_1X_1 параллельны. Аналогично докажем, что образ Y_1 любой точки Y луча AX принадлежит лучу A_1X_1. Ясно, что любая точка луча A_1X_1 является образом какой-то точки луча AX.

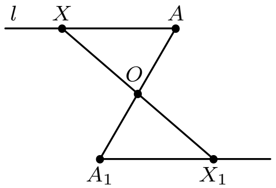

Рис. 41

Пример 1. На противоположных сторонах параллелограмма как на сторонах построены вне параллелограмма два равносторонних треугольника. Докажите, что прямая, соединяющая их вершины, лежащие вне параллелограмма, проходит через центр параллелограмма.

Решение. Пусть M и N — вершины равносторонних треугольников BMC и DNA, построенных вне параллелограмма $ABCD$ с центром O (рис. 42). Тогда $BM \parallel DN$ и $CM \parallel AN$. При симметрии относительно точки O луч BM переходит в луч DN, а луч CM — в луч AN. Поэтому точка M пересечения лучей BM и CM переходит в точку пересечения N лучей DN и AN. Поскольку точка N симметрична точке M относительно точки O, точки M, O и N лежат на одной прямой.

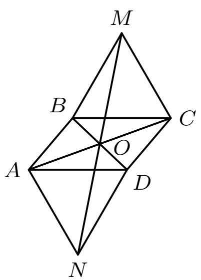

Рис. 42

Пример 2. Дан параллелограмм и точка N на одной из его сторон. Постройте ромб, одна вершина которого — точка N, а остальные три вершины лежат на трех других сторонах параллелограмма.

Решение. Пусть точка N лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$ с центром O (рис. 43). Предположим, что вершины K, L и M искомого ромба $KLMN$ расположены на сторонах AB, AD и CD соответственно. Тогда точка O — центр симметрии параллелограмма $ABCD$ и ромба $KLMN$, причем $KM \perp NL$.

Отсюда вытекает следующее построение. Строим образ L данной точки N при симметрии относительно точки O пересечения диагоналей данного параллелограмма. Точка L лежит на стороне AD. Через точку O проводим прямую, перпендикулярную NL. Если эта прямая пересекает стороны AB и CD в точках K и M соответственно, то эти точки — вершины искомого ромба $KLMN$.

Пример 3. Через данную точку проведите прямую, отрезок которой, заключенный между двумя данными окружностями, делился бы этой точкой пополам.

Решение. Предположим, что задача решена (рис. 44). Пусть A и B — точки на окружностях с центрами O_1 и O_2 соответственно, M — данная середина отрезка AB. При симметрии относительно точки M точка A переходит в точку B, а окружность с центром O_1 — в равную ей окружность с некоторым центром O, проходящую через точку B.

Отсюда вытекает следующий способ построения. Строим образ данной окружности с центром O_1 при симметрии относительно данной точки M. Для этого достаточно построить точку O, симметричную O_1 относительно M, и провести окруж-

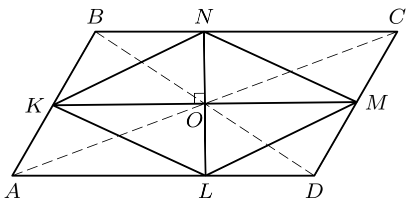

Рис. 43

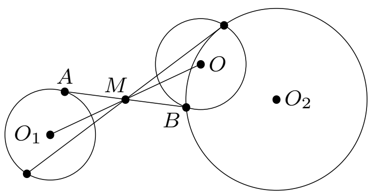

Рис. 44

ность с центром O радиусом, равным радиусу данной окружности с центром O_1. Если построенная окружность пересекает вторую данную окружность, то каждая точка пересечения является искомой точкой A. Задача имеет либо два решения, либо одно, либо ни одного решения.

Задачи первого уровня

2.302. Постройте образы данной прямой и данной окружности при симметрии относительно данной точки.

2.303. Пусть M — середина отрезка AB. Точки A', B' и M' — образы точек соответственно A, B и M при симметрии относительно некоторой точки O. Докажите, что M' — середина отрезка $A'B'$.

2.304. Докажите, что фигура, состоящая из двух равных параллельных отрезков, имеет центр симметрии.

2.305. Докажите, что четырехугольник, имеющий центр симметрии, является параллелограммом.

2.306. На противоположных сторонах параллелограмма как на сторонах построены вне параллелограмма два квадрата. Докажите, что прямая, соединяющая их центры, проходит через центр параллелограмма.

2.307. Докажите, что точки, симметричные произвольной точке относительно середин сторон квадрата, являются вершинами некоторого квадрата.

2.308. Найдите координаты образа точки $M(x;y)$ при симметрии относительно: а) начала координат; б) точки $A(a;b)$.

2.309. Пусть a и b — некоторые числа. Каждой точке $M(x;y)$ координатной плоскости поставим в соответствие точку $M'(x';y')$, для которой $x' = 2a - x$ и $y' = 2b - y$. Докажите, что это соответствие есть центральная симметрия плоскости. Каковы координаты центра симметрии?

Задачи второго уровня

2.310. Выпуклый многоугольник имеет центр симметрии. Докажите, что сумма его углов делится на $360°$.

2.311. Дан угол и точка внутри него. С помощью центральной симметрии проведите через данную точку прямую, отрезок которой, заключенный внутри угла, делился бы этой точкой пополам.

2.312. Проведите через общую точку A пересекающихся окружностей S_1 и S_2 прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней равные хорды.

2.313. Даны две концентрические окружности S_1 и S_2. Постройте прямую, на которой эти окружности высекают три равных отрезка.

2.314. Дан параллелограмм $ABCD$ и точка M. Через точки A, B, C и D проведены прямые, параллельные прямым MC, MD, MA и MB соответственно. Докажите, что проведенные прямые пересекаются в одной точке.

2.315. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно равны и параллельны. Докажите, что он имеет центр симметрии.

2.316. При симметрии относительно точки пересечения медиан треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ при пересечении образуют шестиугольник $KLMNOP$. Докажите, что диагонали KN, LO и MP этого шестиугольника пересекаются в одной точке, и найдите стороны шестиугольника, если стороны треугольника ABC равны a, b и c.

2.317. Докажите, что противоположные стороны шестиугольника, образованного сторонами треугольника и касательными к его вписанной окружности, параллельными сторонам, равны между собой.

2.318. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AOB и COD, касаются.

2.319. Существуют фигуры, имеющие бесконечное множество центров симметрии (например, полоса между двумя параллельными прямыми). Может ли фигура иметь более одного, но конечное число центров симметрии?

Задачи третьего уровня

2.320. (*Теорема Монжа.*) Докажите, что прямые, проведенные через середины сторон вписанного четырехугольника перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.

2.321. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке C, а вторую — в точке D. Пусть M и N — середины дуг BC и BD, не содержащих точку A, а K — середина отрезка CD. Докажите, что угол MKN равен 90°. (Можно считать, что точки C и D лежат по разные стороны от точки A.)

ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

Точка X', не лежащая на прямой l, называется *симметричной* точке X относительно прямой l, если отрезок XX' перпендикулярен прямой l и делится ею пополам. Если точка X лежит на прямой l, то говорят, что точка X *симметрична самой себе относительно прямой* l. Прямая l называется *осью симметрии*.

Пример 1. Докажите, что диагональ ромба является его осью симметрии.

Решение. Диагонали ромба перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам, поэтому при симметрии относительно диагонали AC вершины B и D ромба $ABCD$ переходят друг в друга (рис. 45). При этом вершины A и B переходят сами в себя, так как они лежат на оси симметрии. Следовательно, ромб $ABCD$ симметричен относительно диагонали AC. Аналогично для диагонали BD.

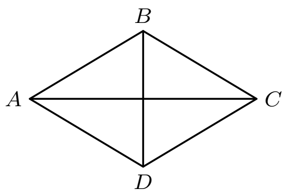

Рис. 45

Пример 2. Постройте треугольник по данным серединам двух его сторон и прямой, на которой лежит биссектриса, проведенная к третьей стороне.

Решение. Предположим, что задача решена. Пусть ABC — искомый треугольник, M и N — середины сторон AB и AC соответственно (рис. 46). При симметрии относительно биссектрисы угла при вершине A луч AC переходит в луч AB, поэтому точка N луча AC переходит в некоторую точку N_1 луча AB. Из этих рассуждений вытекает следующее построение. Строим

образ N_1 данной точки N относительно данной прямой. Если точка N_1 не совпадает со второй данной точкой M, проводим прямую через точки N_1 и M. Если эта прямая пересекается с данной прямой в точке A, то A — вершина искомого треугольника. Отложив на продолжениях отрезков AN и AM за точки N и M соответственно отрезки NC и MB, равные AN и AM, получим вершины C и B искомого треугольника ABC. Если точки N_1 и M совпадают, задача имеет бесконечно много решений. Если точки N_1 и M различны, но прямая N_1M параллельна данной прямой, задача не имеет решений.

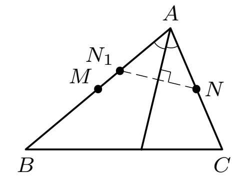

Рис. 46

Пример 3. Среди всех треугольников ABC с данным углом C и стороной AB найдите треугольник с наибольшим возможным периметром.

Решение. Пусть A_1 — точка, симметричная вершине A относительно биссектрисы внешнего угла C треугольника ABC (рис. 47). Тогда $BA_1 = A_1C + BC = AC + BC$. Поскольку $\angle AA_1B = \frac{1}{2}\angle ACB$, точка A_1 лежит на окружности, проходящей через точки A и B, причем $\smile AB = \angle C$. Если BA_1 максимально, то BA_1 — диаметр. Тогда точка C — центр этой окружности и $CA = CB$.

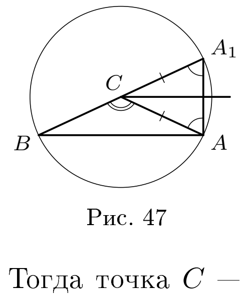

Рис. 47

Ответ. Равнобедренный треугольник.

Задачи первого уровня

2.322. Постройте образы данной прямой и данной окружности при симметрии относительно данной прямой.

2.323. Докажите, что: а) биссектриса — ось симметрии угла; б) серединный перпендикуляр — ось симметрии отрезка.

2.324. Докажите, что серединный перпендикуляр к стороне прямоугольника является его осью симметрии.

2.325. Пусть M и N — середины оснований трапеции. Докажите, что если прямая MN перпендикулярна основаниям, то трапеция — равнобедренная.

2.326. Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC, пересекающие прямые CB и BA в точках K и M соответственно. Найдите AB, если $BM = a$, $KC = b$.

2.327. Существует ли фигура, не имеющая осей симметрии, но переходящая в себя при некотором повороте?

2.328. Существует ли фигура, не имеющая ни осей симметрии, ни центров симметрии, но переходящая в себя при некотором повороте?

2.329. Найдите координаты точки, симметричной точке $M(x; y)$ относительно: а) оси ординат; б) оси абсцисс; в) прямой $x = a$; г) прямой $y = b$; д) прямой $y = x$; е) прямой $y = -x$.

Задачи второго уровня

2.330. Фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии. Докажите, что она имеет центр симметрии.

2.331. Существует ли фигура, имеющая ровно две оси симметрии, но не имеющая центра симметрии?

2.332. Четырехугольник имеет ровно две оси симметрии. Верно ли, что он — либо прямоугольник, либо ромб?

2.333. Может ли пятиугольник иметь ровно две оси симметрии?

2.334. Может ли фигура иметь центр симметрии и ровно одну ось симметрии?

2.335. Докажите, что всякий выпуклый четырехугольник с осью симметрии либо вписанный, либо описанный.

2.336. Точки A и B лежат по разные стороны от прямой l. Постройте на этой прямой точку M так, чтобы прямая l делила угол AMB пополам.

2.337. Точки M и N расположены по одну сторону от прямой l. Как из точки M направить луч света, чтобы он, отразившись от прямой l, попал в точку N?

2.338. Внутри острого угла даны точки M и N. Как из точки M направить луч света, чтобы он, отразившись последовательно от сторон угла, попал в точку N?

2.339. AB — диаметр окружности; C, D, E — точки на одной полуокружности $ACDEB$. На диаметре AB взяты точка F так, что $\angle CFA = \angle DFB$, и точка G так, что $\angle DGA = \angle EGB$. Найдите $\angle FDG$, если дуга AC равна 60°, а дуга BE равна 20°.

2.340. Внутри острого угла даны точки M и N. Постройте на сторонах угла точки K и L так, чтобы периметр четырехугольника $MKLN$ был наименьшим.

2.341. Постройте треугольник по данным серединам двух его сторон и прямой, на которой лежит биссектриса, проведенная к одной из этих сторон.

2.342. В треугольнике ABC проведена высота AH. O — центр описанной окружности. Докажите, что $\angle OAH = |\angle B - \angle C|$.

2.343. Точки M и N расположены по разные стороны от прямой l. Постройте на прямой l такую точку K, чтобы разность отрезков MK и NK была наибольшей.

2.344. Постройте четырехугольник $ABCD$ по четырем сторонам, если известно, что его диагональ AC является биссектрисой угла A.

2.345. Постройте четырехугольник $ABCD$ по двум сторонам AB и AD и двум углам B и D, если известно, что в него можно вписать окружность.

2.346. Постройте треугольник, если дана одна его вершина и три прямых, на которых лежат его биссектрисы.

2.347. Постройте треугольник по двум сторонам и разности углов, прилежащих к третьей.

2.348. Постройте треугольник по двум углам и разности противолежащих им сторон.

2.349. Постройте треугольник по разности двух сторон, углу между ними и стороне, противолежащей этому углу.

2.350. AD — биссектриса угла A в треугольнике ABC. Через точку A проведена прямая, перпендикулярная к AD, и из вершины B опущен перпендикуляр BB_1 на эту прямую. Докажите, что периметр треугольника BB_1C больше периметра треугольника ABC.

Задачи третьего уровня

2.351. Постройте треугольник по центру его описанной окружности и двум прямым, на которых лежат высоты.

2.352. (*Задача Фаньяно.*) Впишите в данный остроугольный треугольник ABC треугольник наименьшего периметра.

ПОВОРОТ

Точка X' называется *образом* точки X, отличной от точки O, при повороте на угол α относительно точки O, если $OX' = OX$ и $\angle XOX' = \alpha$. Образом точки O при этом повороте называется сама точка O.

Пример 1. При повороте на угол 90° относительно центра параллелограмм перешел сам в себя. Докажите, что этот параллелограмм — квадрат.

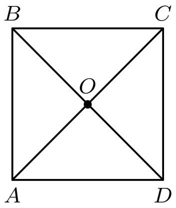

Рис. 48

Решение. Пусть диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 48). Если при повороте на угол 90° относительно точки O вершина A переходит в вершину B, то $OA = OB$ и $OA \perp OB$. Поэтому $AC = 2OA = 2OB = BD$ и $AC \perp BD$. Значит, параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник и ромб. Следовательно, $ABCD$ — квадрат.

Пример 2. Постройте равносторонний треугольник ABC с вершинами на трех данных параллельных прямых.

Решение. Предположим, что нужный треугольник ABC построен. Пусть его вершины A, B, и C лежат на данных параллельных прямых l_1, l_2 и l_3 соответственно (рис. 49). При повороте на 60° относительно точки A, переводящем вершину C в вершину B, прямая l_3 перейдет в некоторую прямую l, пересекающую l_2 в точке B.

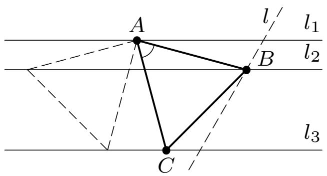

Рис. 49

Отсюда вытекает следующий способ построения. Возьмем на прямой l_1 произвольную точку A. Образ прямой l_3 при повороте на угол 60° относительно точки A пересекает прямую l_2 в вершине B искомого равностороннего треугольника.

Пример 3. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята точка P. Из

вершины A_1 опущен перпендикуляр на A_2P, из A_2 — на A_3P, из A_3 — на A_4P, из A_4 — на A_1P. Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

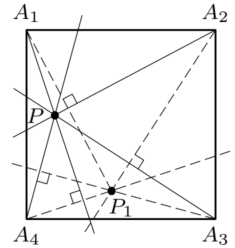

Рис. 50

Решение. При повороте относительно центра квадрата на 90°, переводящем точку A_1 в точку A_2 (рис. 50), перпендикуляры, опущенные из вершин A_1, A_2, A_3, A_4, переходят в прямые A_2P, A_3P, A_4P и A_1P соответственно. Поэтому точкой их пересечения является образ точки P при обратном повороте.

Задачи первого уровня

2.353. Постройте образы данной прямой и данной окружности при повороте на данный угол относительно данной точки.

2.354. Через точку внутри данного круга проведите хорду, отсекающую от окружности дугу заданной угловой величины.

2.355^0. Докажите, что треугольник ABC является правильным тогда и только тогда, когда при повороте на 60° (либо по часовой стрелке, либо против) относительно точки A вершина B переходит в C.

2.356. Через центр квадрата проведены две перпендикулярные прямые. Докажите, что их точки пересечения со сторонами квадрата также являются вершинами квадрата.

2.357. Пусть две прямые пересекаются в точке O под углом α. Докажите, что при повороте на угол α (в одном из направлений) относительно произвольной точки, отличной от O, одна из этих прямых перейдет в прямую, параллельную другой.

2.358. Найдите координаты образа точки $M(x; y)$ при повороте относительно начала координат на угол 90°: а) против часовой стрелки; б) по часовой стрелке.

Задачи второго уровня

2.359. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ постройте точки M и N так, чтобы угол при вершине A равнобедренного треугольника MAN имел данную величину α.

2.360. Пусть M и N — середины сторон CD и DE правильного шестиугольника $ABCDEF$. Найдите величину угла между прямыми AM и BN.

2.361. Шестиугольник $ABCDEF$ правильный, K и M — середины отрезков BD и EF. Докажите, что треугольник AMK равносторонний.

2.362. Постройте равносторонний треугольник, одна вершина которого лежала бы на данной окружности, другая — на данной прямой, а третья — в данной точке.

2.363. Постройте квадрат, три вершины которого лежали бы на трех данных параллельных прямых.

2.364. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник с вершиной прямого угла в данной точке и с вершинами острых углов на двух данных окружностях.

2.365. Точка P лежит внутри равностороннего треугольника ABC. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны отрезкам PA, PB и PC.

2.366. Впишите квадрат в данный параллелограмм.

2.367. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE; M и P — середины отрезков AD и BE. Докажите, что треугольник CPM — равносторонний.

2.368. Дан ромб $ABCD$ с острым углом A, равным $60°$. Прямая MN отсекает от сторон AB и BC отрезки MB и NB, сумма которых равна стороне ромба. Найдите углы треугольника MDN.

2.369. На дуге BC окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, взята произвольная точка M. Докажите с помощью поворота, что $AM = BM + CM$.

2.370. Два квадрата $BCDA$ и $BKMN$ имеют общую вершину B. Докажите с помощью поворота, что медиана BE треугольника ABK и высота BF треугольника CBN лежат на одной прямой. (Вершины обоих квадратов названы по часовой стрелке).

2.371. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причем $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.

2.372. Дан правильный треугольник ABC. Некоторая прямая, параллельная прямой AC, пересекает прямые AB и BC в точках M и P, соответственно. Точка D — центр правильного треугольника PMB, точка E — середина отрезка AP. Найдите углы треугольника DEC.

2.373. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники ABC_1, AB_1C и A_1BC. Пусть P и Q — середины отрезков A_1B_1 и A_1C_1. Докажите, что треугольник APQ равносторонний.

2.374. Из вершины A квадрата $ABCD$ внутрь квадрата проведены два луча, на которые опущены перпендикуляры BK, BL, DM, DN из вершин B и D. Докажите, что отрезки KL и MN равны и перпендикулярны друг другу.

2.375. Даны две точки и окружность. Через данные точки проведите две секущие, отрезки которых внутри данной окружности были бы равны и пересекались бы под данным углом α.

2.376. На сторонах треугольника ABC построены вне треугольника равносторонние треугольники BCA_1, CAB_1, ABC_1 и проведены отрезки AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что эти отрезки равны между собой.

2.377. Точка M лежит внутри квадрата $ABCD$, а точка K — вне, причем треугольники AMD и CKD равносторонние. Докажите, что точки B, M и K лежат на одной прямой.

2.378. Точка P расположена внутри квадрата $ABCD$, причем $AP : BP : CP = 1 : 2 : 3$. Найдите угол APB.

Задачи третьего уровня

2.379. Вокруг квадрата описан параллелограмм (вершины квадрата лежат на разных сторонах параллелограмма). Докажите, что перпендикуляры, опущенные их вершин параллелограмма на стороны квадрата, образуют новый квадрат.

2.380. Дан треугольник ABC. На его сторонах AB и BC построены внешним образом квадраты $ABMN$ и $BCPQ$. Докажите, что центры этих квадратов и середины отрезков MQ и AC образуют квадрат.

2.381. (*Задача Ферма.*) Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

Точка X' называется *образом* точки X при параллельном переносе, заданном парой точек A и B, если лучи XX' и AB сонаправлены и $XX' = AB$.

При параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую или в себя.

Пример 1. Постройте отрезок, равный и параллельный данному, так, чтобы его концы лежали на данной прямой и на данной окружности.

Решение. Предположим, что задача решена. Пусть AB — один из отрезков, равных и параллельных данному отрезку MN, причем точка A лежит на данной окружности S с центром O, а точка B — на данной прямой l (рис. 51). При параллельном переносе, переводящем точку M в точку N, точка A перейдет в точку B, а окружность S — в окружность S_1, причем точка B — одна из точек пересечения окружности S_1 с прямой l.

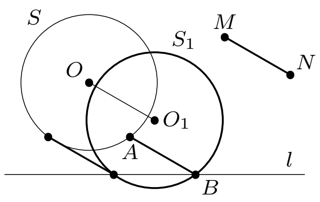

Рис. 51

Отсюда вытекает следующий способ построения. Пусть MN — данный отрезок. Построим образ S_1 данной окружности S при параллельном переносе, переводящем точку M в точку N. Пусть B — одна из точек пересечения окружности S_1 с данной прямой l. Тогда прообраз A точки B при этом параллельном переносе есть второй конец искомого отрезка. Если окружность S_1 не пересекает прямую l, то задача не имеет решений.

Пример 2. В каком месте следует построить мост MN через реку, разделяющую две данные деревни A и B, чтобы путь $AMNB$ из деревни A в деревню B был кратчайшим? (Берега реки считаются параллельными прямыми, мост предполагается перпендикулярным к реке.)

Решение. Предположим, что некоторое положение моста найдено (рис. 52). При параллельном переносе, переводящем точку M в точку N, точка A перейдет в некоторую точку A_1, а точка M — в точку N. Тогда $AM + MN + NB = AA_1 + A_1N + NB \geqslant AA_1 + A_1B$ (неравенство треугольника), причем равенство достигается, если точки A_1, N и B лежат на одной прямой, т. е. $BN \parallel AM$.

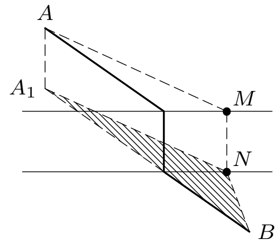

Рис. 52

Отсюда вытекает следующий способ построения. Отложим от точки A отрезок AA_1, по величине равный ширине реки и перпендикулярный к ее направлению; соединим точку A_1 с точкой B; точка N, полученная при пересечении A_1B с более близким к B берегом реки, определит положение моста.

Пример 3. Параллельно данной прямой проведите прямую, на которой две данные окружности высекали бы хорды, сумма (или разность) длин которых имела бы заданную величину a.

Решение. Рассмотрим случай, когда окружности расположены одна вне другой и сумма указанных хорд имеет заданную величину a. Предположим, что нужная прямая проведена (рис. 53). Пусть AB и CD хорды данных окружностей S_1 и S_2, параллельные данной прямой l, и $AB + CD = a$ (A, B, C и D — последовательные точки проведенной прямой). При параллельном переносе, переводящем точку C в точку B, окружность S_2 переходит в равную ей окружность S. Пусть Q_1, Q_2 и Q — проекции центров окружностей S_1, S_2 и S на проведенную прямую.

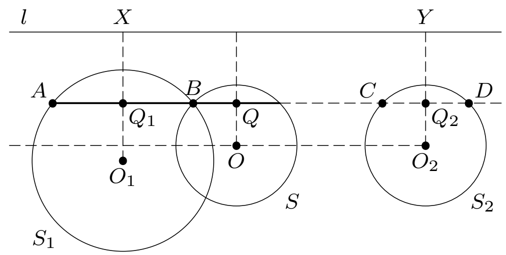

Рис. 53

Тогда Q_1, Q_2 и Q — середины соответствующих хорд. Поэтому $QQ_1 = QB + BQ_1 = \frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$.

Отсюда вытекает следующий способ построения. Совершим параллельный перенос одной из окружностей вдоль данной прямой на расстояние, равное $XY - \frac{a}{2}$, где X и Y — проекции центров данных окружностей на данную прямую. Если образ S окружности S_2 при этом переносе пересекает окружность S_1 в точке B, то прямая, проходящая через точку B параллельно данной прямой l, — искомая. Аналогичное решение для разности хорд.

Задачи первого уровня

2.382. Докажите, что при параллельном переносе окружность переходит в окружность.

2.383. Даны точки A и B. Рассмотрим параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B. Постройте образы данной прямой и окружности при этом параллельном переносе.

2.384. Дан угол ABC и прямая l. Параллельно прямой l проведите прямую, на которой стороны угла ABC высекают отрезок данной длины.

2.385. Постройте хорду данной окружности, равную и параллельную данному отрезку.

2.386. Постройте отрезок, равный и параллельный данному, так, чтобы его концы лежали на двух данных окружностях.

2.387. Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M. Докажите, что существует выпуклый четырехугольник с перпендикулярными диагоналями длины AB и BC, стороны которого равны AM, BM, CM, DM.

Задачи второго уровня

2.388. Две окружности радиуса R касаются в точке K. На одной из них взята точка A, а на другой — точка B, причем $\angle AKB = 90^\circ$. Докажите, что $AB = 2R$.

2.389. Две окружности радиуса R пересекаются в точках M и N. Пусть A и B — точки пересечения серединного перпендикуляра к отрезку MN с этими окружностями, лежащие по одну сторону от прямой MN. Докажите, что $MN^2 + AB^2 = 4R^2$.

2.390. Через точку пересечения двух окружностей проведите секущую так, чтобы часть ее, заключенная внутри окружностей, имела данную длину.

2.391. Параллельно данной прямой проведите прямую, на которой две данные окружности высекали бы равные хорды.

2.392. Постройте четырехугольник $ABCD$ по четырем углам и сторонам $AB = a$ и $CD = b$.

2.393. Постройте четырехугольник по трем сторонам и углам, прилежащим к четвертой.

2.394. Постройте четырехугольник по диагоналям, углу между ними и двум каким-нибудь сторонам.

2.395. Постройте выпуклый четырехугольник по четырем сторонам и отрезку, соединяющему середины двух противоположных сторон.

2.396. Докажите, что композиция двух центральных симметрий есть параллельный перенос.

2.397. Докажите, что композиция двух осевых симметрий с параллельными осями есть параллельный перенос.

Задачи третьего уровня

2.398. Среди всех четырехугольников с данными диагоналями и данным углом между ними найдите четырехугольник наименьшего периметра.

§ 2.7. Векторы

Для любых трех точек A, B и C верны равенства

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}.$$

Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *коллинеарны* тогда и только тогда, когда $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, где k — некоторое число.

Любой вектор можно единственным образом разложить по двум неколлинеарным векторам.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$ называется число $x_1x_2 + y_1y_2$.

Свойства скалярного произведения.

1^0. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

2^0. $\alpha\vec{a}\cdot\vec{b}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

3^0. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

4^0. $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$.

5^0. $(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})+\vec{b}^2$.

6^0. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}((\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2)$.

7^0. *Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними*: $\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\varphi$.

8^0. *Ненулевые векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.*

Пример 1. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC, причем $BD:DC=m:n$. Выразите вектор $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

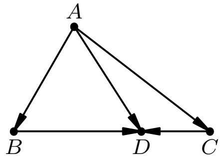

Рис. 54

Решение. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$ (рис. 54). Умножим обе части первого равенства на n, второго на m и сложим почленно векторные равенства $n\cdot\overrightarrow{AD}=n\cdot\overrightarrow{AB}+n\cdot\overrightarrow{BD}$ и $m\cdot\overrightarrow{AD}=m\cdot\overrightarrow{AC}+m\cdot\overrightarrow{CD}$. Поскольку $n\cdot\overrightarrow{BD}$ и $m\cdot\overrightarrow{CD}$ — противоположные векторы, получим равенство $(m+n)\cdot\overrightarrow{AD}=n\cdot\overrightarrow{AB}+m\cdot\overrightarrow{AC}$, откуда $\overrightarrow{AD}=\frac{n}{m+n}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{m}{m+n}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Пример 2. Докажите, что координаты точки пересечения медиан треугольника равны средним арифметическим координат вершин.

Решение. Пусть $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ — вершины треугольника, $M(x;y)$ — точка пересечения его медиан, $O(0;0)$ — начало координат (рис. 55). Тогда $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$, поэтому координаты вектора OM равны средним арифметическим координат векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, а так как координаты точек A, B, C и M равны соответственно координатам векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OM}$, то $x=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$ и $y=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$.

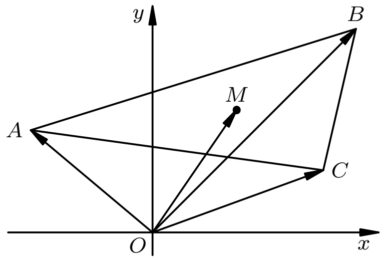

Рис. 55

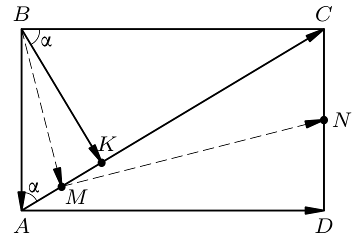

Рис. 56

Пример 3. В прямоугольнике $ABCD$ опущен перпендикуляр BK на диагональ AC (рис. 56). Точки M и N — середины отрезков AK и CD соответственно. Докажите, что угол BMN прямой.

Решение. Имеем:

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{KC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{KC}),\quad \overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BK}),$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BM}&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{KC})(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BK})=\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{BK})=\\&=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{BA})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BK}-\overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{AB}),\end{aligned}$$

так как $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{BK}=0$.

Обозначим $\angle BAC=\angle KBC=\alpha$. Тогда

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BK}-\overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{AB}&=BC\cdot BK\cdot\cos\alpha-KC\cdot AB\cdot\cos\alpha=\\&=(BC\cdot BK-KC\cdot AB)\cdot\cos\alpha=\\&=(BC\cdot KC\cdot\operatorname{ctg}\alpha-KC\cdot BC\cdot\operatorname{ctg}\alpha)\cdot\cos\alpha=0.\end{aligned}$$

Следовательно, $BM\perp MN$.

Задачи первого уровня

2.399. Докажите, что для любых трех точек A, B и C верно равенство $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$.

2.400. Точки M и N — середины сторон соответственно AB и AC треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

2.401. Точки M и N — расположены соответственно на сторонах AB и AC треугольника ABC, причем $AM : MB = AN : NC = 2 : 3$. Выразите вектор $\overrightarrow{MN}$ через вектор $\overrightarrow{CB}$.

2.402. Даны точки $A(1;-1)$, $B(-5;1)$, $C(3;2)$. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, а также координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ и их абсолютные величины.

2.403. Даны точки $A(-1;5)$, $B(2;8)$, $C(7;3)$ и $D(4;0)$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ и докажите, что четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.

2.404. Даны точки $A(-2;2)$, $B(3;3)$, $C(4;-2)$ и $D(-1;-3)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — квадрат.

2.405. Точка M — середина стороны BC параллелограмма $ABCD$. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

2.406⁰. Пусть M — середина отрезка AB, O — произвольная точка. Докажите, что

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

2.407. Точка M делит сторону BC треугольника ABC в отношении $BM : MC = 2 : 5$. Известно, что $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Найдите вектор $\overrightarrow{AM}$.

2.408. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ известно, что $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$. Найдите векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{FD}$ и $\overrightarrow{BM}$, где M — середина стороны EF.

2.409. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC. Докажите, что

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}.$$

2.410. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника.

2.411. Пусть M_1, M_2, $\ldots$, M_6 — середины сторон выпуклого шестиугольника $A_1A_2\ldots A_6$. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны отрезкам M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6.

2.412. Пусть точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон соответственно BC, AC и AB треугольника ABC. Докажите, что для любой точки O выполняется равенство

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

2.413⁰. Пусть M — середина отрезка AB, M_1 — середина отрезка A_1B_1. Докажите, что

$$\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1}).$$

2.414⁰. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, O — произвольная точка. Докажите, что

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

2.415. Дан треугольник ABC и точка M. Известно, что

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Докажите, что M — точка пересечения медиан треугольника ABC.

2.416. Даны точки $A(-2;5)$, $B(4;3)$ и $C(1;-2)$. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC.

2.417. Пусть M — точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$, O — произвольная точка. Докажите, что

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

2.418⁰. Пусть M и N — точки пересечения медиан треугольников ABC и PQR соответственно. Докажите , что

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR}).$$

2.419. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, у которых O и O_1 — точки пересечения диагоналей. Докажите равенство

$$\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1}).$$

2.420. Две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD окружности с центром O пересекаются в точке M. Докажите, что

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

2.421. Даны точки $A(-3;0)$, $B(-2;5)$, $C(9;8)$ и $D(4;-4)$. Докажите, что диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны.

2.422. С помощью скалярного произведения докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

2.423. Даны точки $A(-8;-2)$, $B(-4;3)$ и $C(-1;-3)$. Точка D лежит на прямой $y = 4$, причем $AD \perp BC$. Найдите координаты точки D.

2.424. Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно неравенство

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leqslant \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Задачи второго уровня

2.425. Точки K, L, M и N расположены соответственно на сторонах AB, BC, CD и AD четырехугольника $ABCD$, причем $AK : KB = AN : ND = CL : LB = CM : MD$. Докажите, что четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм.

2.426. На сторонах треугольника ABC построены параллелограммы $ABKL$, $BCMN$ и $ACFG$. Докажите, что из отрезков KN, MF и GL можно составить треугольник.

2.427. Проведены четыре радиуса OA, OB, OC и OD окружности с центром O. Докажите, что если $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, то $ABCD$ — прямоугольник.

2.428. На поверхности стола отметили вершины остроугольного треугольника ABC. В точках A, B и C просверлили отверстия и продели через них нити. Нити связали над столом в один узел, а под столом к каждой из них привязали одинаковые грузы. В какой точке треугольника ABC расположится узел, если полученную систему отпустить?

2.429. На сторонах параллелограмма заданы точки, которые делят стороны в одном и том же отношении (в каком-либо одном направлении обхода). Докажите, что точки деления служат вершинами параллелограмма, а центры этих параллелограммов совпадают.

2.430. На сторонах треугольника заданы точки, которые делят стороны в одном и том же отношении (в каком-либо одном направлении обхода). Докажите, что точки пересечения медиан данного треугольника и треугольника, имеющего вершинами точки деления, совпадают.

2.431. Из произвольной точки M внутри равностороннего треугольника опущены перпендикуляры MK_1, MK_2, MK_3 на его стороны. Докажите, что

$$\overrightarrow{MK_1} + \overrightarrow{MK_2} + \overrightarrow{MK_3} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO},$$

где O — центр треугольника.

2.432. Точки M, K, N и L — середины сторон AB, BC, CD и DE пятиугольника $ABCDE$ (не обязательно выпуклого), P и Q — середины отрезков MN и KL. Докажите с помощью векторов, что отрезок PQ в четыре раза меньше стороны AE и параллелен ей.

2.433. Докажите, что при произвольном выборе точки O равенство

$$\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}, \quad \text{где } k \text{ — любое число},$$

является необходимым и достаточным условием принадлежности различных точек A, B, C одной прямой.

2.434. На диагоналях AC и CE правильного шестиугольника $ABCDEF$ взяты точки M и N соответственно, такие, что $AM : AC = CN : CE = \lambda$. Известно, что точки B, M и N лежат на одной прямой. Найдите λ.

2.435. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, O — центр описанной окружности. Докажите, что

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

2.436. Используя результат предыдущей задачи, докажите, что центр описанной окружности, точка пересечения медиан и точка пересечения высот (ортоцентр) треугольника лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*).

2.437. На стороне AB треугольника ABC с углом ABC, равным α, расположена точка K, причем $AK = BC$. Пусть P — середина BK, M — середина AC. Найдите угол APM.

2.438. Найдите координаты точки, лежащей на прямой $3x + 5y = 0$ и равноудаленной от точек $A(-5;-1)$ и $B(7;7)$.

2.439. Даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Докажите, что вектор $\vec{c}$ перпендикулярен вектору $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}$.

2.440. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

2.441. Стороны треугольника равны a, b и c. Найдите медиану треугольника, проведенную к стороне, равной a.

2.442. На стороне BC треугольника ABC взята точка M, причем $BM : MC = 3 : 2$. Известно, что $BC = 15$, $AC = 10$, $AB = 8$. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ и найдите длину отрезка AM.

2.443. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точка M лежит на диагонали AC, причем $AM : MC = 3 : 1$. Докажите с помощью скалярного произведения векторов, что $\angle KMD = 90^\circ$.

2.444. На сторонах AB и AC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $AMNB$ и $CKLA$. Докажите с помощью скалярного произведения векторов, что медиана AP треугольника ABC перпендикулярна прямой ML.

2.445. Пусть A, B, C, D — произвольные точки. Докажите, что

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD} = 0.$$

2.446. С помощью скалярного произведения векторов докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

2.447. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, а точка H такова, что

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Докажите, что H — точка пересечения высот треугольника ABC.

2.448. (*Теорема Стюарта.*) Точка D лежит на стороне AB треугольника ABC. Докажите с помощью скалярного произведения векторов, что

$$AB\cdot CD^2 = AD\cdot CB^2 + BD\cdot CA^2 - AD\cdot BD\cdot AB.$$

Задачи третьего уровня

2.449. Пусть O — центр правильного многоугольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$, X — произвольная точка плоскости. Докажите, что:

а) $\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$;

б) $\overrightarrow{XA_1} + \ldots + \overrightarrow{XA_n} = n\overrightarrow{XO}$.

2.450. Какую линию описывает середина отрезка между двумя пешеходами, равномерно идущими по прямым дорогам?

2.451. Четыре окружности радиуса R пересекаются по три в точках M и N, и по две в точках A, B, C и D. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

2.452. Пусть α, β, γ — углы треугольника. Докажите, что:

а) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}$;

б) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geqslant -\frac{3}{2}$.

Когда достигаются равенства?

§ 2.8. Площадь[1]

Равные многоугольники имеют равные площади.

Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

Площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон.

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

Площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту.

Фигуры, имеющие равные площади, называются *равновеликими*.

---

[1] Все задачи этого параграфа могут быть решены без применения теоремы Пифагора.

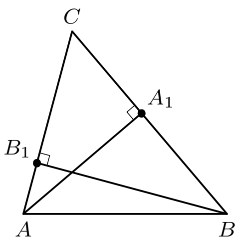

Рис. 57

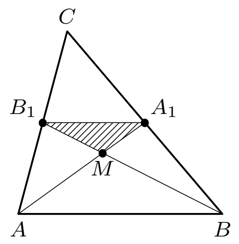

Рис. 58

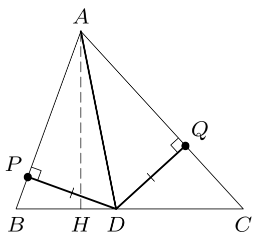

Рис. 59

Пример 1. Докажите, что в любом треугольнике высоты обратно пропорциональны сторонам, к которым они проведены.

Решение. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC (рис. 57). Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AA_1 = \frac{1}{2}AC \cdot BB_1$, откуда $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AC}{BC}$.

Пример 2. Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M (рис. 58). Найдите площадь треугольника A_1MB_1, если площадь треугольника ABC равна 1.

Решение. По теореме о медианах треугольника $AM = 2A_1M$, поэтому

$$S_{A_1MB_1} = \frac{1}{3}S_{AA_1B_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}S_{AA_1C} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

Пример 3. Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

Решение. Пусть AD — биссектриса треугольника ABC (рис. 59). Нужно доказать, что $BD : DC = AB : AC$. Опустим перпендикуляры DP и DQ на стороны AB и AC соответственно. Поскольку любая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон, $DP = DQ$. Отношение площадей треугольников ADB и ADC равно отношению их сторон AB и AC, так как высоты DP и DQ, проведенные к эти сторонам, равны. С другой стороны, отношение площадей этих треугольников равно отношению их сторон BD и DC, так как высота AH, проведенная из вершины A, у них общая. Следовательно, $BD : DC = AB : AC$.

Задачи первого уровня

2.453. Площадь прямоугольника равна 24. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в серединах сторон прямоугольника.

2.454^0. Средняя линия треугольника разбивает его на треугольник и четырехугольник. Какую часть составляет площадь полученного треугольника от площади исходного?

2.455. Точка M расположена на стороне BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника AMD равна половине площади параллелограмма.

2.456^0. Докажите, что медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника.

2.457. Точки, делящие сторону треугольника на n равных частей, соединены отрезками с противоположной вершиной. Докажите, что при этом треугольник также разделился на n равновеликих частей.

2.458^0. Пусть M — точка на стороне AB треугольника ABC, причем $AM : MB = m : n$. Докажите, что площадь треугольника CAM относится к площади треугольника CBM как $m : n$.

2.459. Докажите, что диагонали разбивают параллелограмм на четыре равновеликих треугольника.

2.460. Точки M и N — соответственно середины противоположных сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1. Найдите площадь четырехугольника, образованного пересечениями прямых AN, BN, CM и DM.

2.461^0. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями равна половине произведения диагоналей.

2.462. Площадь трапеции, основания которой относятся как 3 : 2, равна 35. Найдите площади треугольников, на которые трапеция разбивается диагональю.

2.463^0. На сторонах AB и AC треугольника ABC, площадь которого равна 50, взяты соответственно точки M и K так, что $AM : MB = 1 : 5$, а $AK : KC = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника AMK.

2.464. Точки M и N расположены на стороне BC

треугольника ABC, а точка K — на стороне AC, причем

$$BM : MN : NC = 1 : 1 : 2 \quad \text{и} \quad CK : AK = 1 : 4.$$

Известно, что площадь треугольника ABC равна 1. Найдите площадь четырехугольника $AMNK$.

2.465. Вершины одного квадрата расположены на сторонах другого и делят эти стороны в отношении $1 : 2$, считая по часовой стрелке. Найдите отношение площадей квадратов.

2.466. Площадь треугольника ABC равна 1. Точки M и N — середины сторон AB и AC, а точка K лежит на стороне BC. Найдите площадь треугольника KMN.

2.467. Прямая, проведенная через вершину C трапеции $ABCD$ параллельно диагонали BD, пересекает продолжение основания AD в точке M. Докажите, что треугольник ACM равновелик трапеции $ABCD$.

2.468. Найдите площадь ромба со стороной, равной 8, и острым углом 30°.

2.469. Основания равнобокой трапеции равны a и b ($a > b$), острый угол равен 45°. Найдите площадь трапеции.

2.470. Проекция диагонали равнобокой трапеции на ее большее основание равна a, боковая сторона равна b. Найдите площадь трапеции, если угол при ее меньшем основании равен 150°.

2.471. Медианы BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке K. Найдите площадь треугольника BKN, если площадь треугольника ABC равна 24.

2.472⁰. Докажите, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих частей.

2.473. Медианы BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке K. Докажите, что четырехугольник $AMKN$ равновелик треугольнику BKC.

2.474. Диагонали разбивают трапецию на четыре треугольника. Докажите, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам трапеции, равновелики.

2.475. Диагонали четырехугольника разбивают его на четыре треугольника. Известно, что треугольники, прилежащие к двум противоположным сторонам четырехугольника, равновелики. Докажите, что данный четырехугольник — трапеция или параллелограмм.

Задачи второго уровня

2.476. Точка внутри параллелограмма соединена со всеми его вершинами. Докажите, что суммы площадей треугольников, прилежащих к противоположным сторонам параллелограмма, равны между собой.

2.477. Докажите, что если диагональ какого-нибудь четырехугольника делит другую диагональ пополам, то она разбивает этот четырехугольник на две равновеликие части.

2.478. Середины сторон выпуклого четырехугольника последовательно соединены отрезками. Докажите, что площадь полученного четырехугольника вдвое меньше площади исходного.

2.479. Боковые стороны трапеции лежат на перпендикулярных прямых. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в серединах диагоналей и серединах оснований, если боковые стороны равны a и b.

2.480⁰. Точки M и N принадлежат соответственно сторонам AB и AC треугольника ABC или их продолжениям, причем $AM : AB = m : n$, $AN : AC = p : q$. Докажите, что

$$S_{AMN} : S_{ABC} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}.$$

2.481. Стороны треугольника площади 1 разделены в отношении $3 : 1$ по часовой стрелке. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках деления.

2.482. На продолжениях сторон AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ соответственно за точки B, C, D и A отложены отрезки BB_1, CC_1, DD_1 и AA_1, равные этим сторонам. Найдите площадь четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$, если площадь четырехугольника $ABCD$ равна s.

2.483. Данный параллелограмм разделите на три равновеликие части прямыми, выходящими из одной вершины.

2.484. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, взаимно перпендикулярны и равны 2 и 7. Найдите площадь четырехугольника.

2.485. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равны между собой. Найдите площадь четырехугольника, если его диагонали равны 8 и 12.

2.486. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки внутри равностороннего треугольника до его сторон всегда одна и та же.

2.487. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки на основании равнобедренного треугольника до его боковых сторон всегда одна и та же.

2.488. Стороны AB и AC треугольника ABC равны соответственно a и b. На медиане, проведенной к стороне BC, взята точка M. Сумма расстояний от этой точки до прямых AB и AC равна c. Найдите эти расстояния.

2.489^{0}. Докажите, что площадь треугольника равна произведению полупериметра треугольника и радиуса вписанной окружности.

2.490. Докажите теорему Пифагора, используя результат предыдущей задачи.

2.491. Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна произведению отрезков, на которые гипотенуза делится точкой касания со вписанной окружностью.

2.492. Окружность с центром на гипотенузе прямоугольного треугольника касается катетов. Найдите радиус окружности, если катеты равны a и b.

2.493^{0}. Окружность касается стороны треугольника, равной a, и продолжения двух других сторон. Докажите, что радиус окружности равен площади треугольника, деленной на разность между полупериметром и стороной a.

2.494. Найдите площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной c, и острым углом $15°$.

2.495. Точки K, L, M и N — середины сторон соответственно AB, BC, CD и AD параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1. Найдите площадь параллелограмма, образованного пересечениями прямых AL, BM, CN и DK.

2.496. Произвольный четырехугольник разделен диагоналями на четыре треугольника; площади трех из них равны 10, 20 и 30, и каждая меньше площади четвертого треугольника. Найдите площадь данного четырехугольника.

2.497. Боковая сторона AB и основание BC трапеции $ABCD$ вдвое меньше ее основания AD. Найдите площадь трапеции, если $AC = a$, $CD = b$.

2.498. В треугольнике ABC угол A равен $45°$, а угол C острый. Из середины стороны BC опущен перпендикуляр NM на сторону AC. Площади треугольников NMC и ABC относятся как $1 : 8$. Найдите углы треугольника ABC.

2.499. Каждая сторона треугольника больше 100. Может ли его площадь быть меньше 0,01?

2.500. Дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место таких точек M, для которых:

а) треугольники AMB и ABC равновелики;

б) треугольники AMB и AMC равновелики;

в) треугольники AMB, AMC и BMC равновелики.

2.501. Точки K и L лежат на стороне BC выпуклого четырехугольника $ABCD$, а точки M и N на стороне AD, причем $BK = KL = LC$ и $AN = NM = MD$. Докажите, что площадь треугольника KNL равна полусумме площадей треугольников ABK и CML.

2.502. Две прямые делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника на три равные части и не пересекаются внутри четырехугольника. Докажите, что между этими прямыми заключена треть площади четырехугольника.

2.503. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$, площадь которого равна 25, проведены диагонали. Известно, что площадь треугольника ABC вдвое больше площади треугольника ABD, а площадь треугольника BCD втрое больше площади треугольника ADC. Найдите площади треугольников ABC, ABD, ACD и BCD.

2.504. Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, разделил его на два четырехугольника, имеющих равные площади. Докажите, что эти стороны параллельны.

2.505. Пусть P — середина стороны AB выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что если площадь треугольника

PDC равна половине площади четырехугольника $ABCD$, то стороны BC и AD параллельны.

2.506. Середина каждой стороны параллелограмма соединена с концами противоположной стороны. Найдите площадь восьмиугольника, образованного пересечениями проведенных отрезков, если площадь параллелограмма равна 1.

Задачи третьего уровня

2.507. В квадрате со стороной 1 произвольно берут 101 точку (не обязательно внутри квадрата, возможно, часть на сторонах), причем никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Докажите, что существует треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не больше $\frac{1}{100}$.

2.508. Дан угол XAY и точка O внутри него. Проведите через точку O прямую, отсекающую от данного угла треугольник наименьшей площади.

2.509. Найдите геометрическое место точек X, лежащих внутри трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) или на ее сторонах, если известно, что $S_{XAB} = S_{XCD}$.

2.510. Пусть M и N — середины противоположных сторон BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$, отрезки AM и BN пересекаются в точке P, а отрезки DM и CN — в точке Q. Докажите, что сумма площадей треугольников APB и CQD равна площади четырехугольника $MPNQ$.

2.511. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади треугольника.

2.512. Три прямые, параллельные сторонам треугольника ABC и проходящие через одну точку, отсекают от треугольника ABC трапеции. Три диагонали этих трапеций, не имеющие общих концов, делят треугольник на семь частей, из которых четыре — треугольники. Докажите, что сумма площадей трех из этих треугольников, прилегающих к сторонам треугольника ABC, равна площади четвертого.

2.513. На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Площадь четырехугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырехугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.

§ 2.9. Подобные треугольники

Два треугольника называются *подобными*, если их углы соответственно равны, а соответствующие стороны пропорциональны, т. е.

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \iff$$
$$\iff \angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1,\ \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Отношение соответствующих сторон подобных треугольников называется *коэффициентом подобия*.

Теорема. *Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.*

Признаки подобия треугольников. *Два треугольника подобны, если:*

1. *Два угла одного из них соответственно равны двум углам другого.*

2. *Две стороны одного из них соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы между этими сторонами равны.*

3. *Три стороны одного из них соответственно пропорциональны трем сторонам другого.*

Обобщенная теорема Фалеса. *Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на них пропорциональные отрезки.*

Пример 1. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ и AB втрое больше A_1B_1. Найдите медиану A_1M_1 треугольника $A_1B_1C_1$, если медиана AM треугольника ABC равна 12.

Решение. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны по двум углам (рис. 60). Поскольку $\frac{AB}{A_1B_1} = 3$, коэффициент подобия

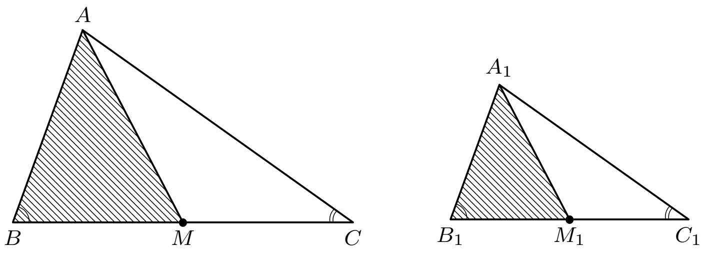

Рис. 60

равен 3. Поэтому $\frac{BM}{B_1M_1} = \left(\frac{1}{2}BC\right)/\left(\frac{1}{2}B_1C_1\right)$. Значит, треугольник ABM подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ по второму признаку подобия треугольников, причем коэффициент подобия также равен 3. Следовательно, $AM = 3 \cdot A_1M_1$, откуда $A_1M_1 = \frac{1}{3}AM = 4$.

Пример 2. Прямая, параллельная основаниям трапеции, делит ее на две равновеликие трапеции. Найдите отрезок этой прямой, заключенный внутри трапеции, если основания равны a и b.

Решение. *Первый способ.* Пусть точки M и N находятся на боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$, P — точка пересечения с MN прямой, проходящей через точку C параллельно AB, Q — точка пересечения с AD прямой, проходящей через точку N параллельно AB (рис. 61, a). Обозначим $MN = x$; h_1 и h_2 — высоты подобных треугольников PCN и QND. Если $BC = a$ и $AD = b$ $(b > a)$, то

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x+a)h_1 = \frac{1}{2}(b+x)h_2, \\ \frac{h_1}{h_2} = \frac{x-a}{b-x}. \end{cases}$$

Поэтому $\frac{b+x}{x+a} = \frac{x-a}{b-x}$. Отсюда находим, что $x^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$.

Второй способ. Пусть O — точка пересечения продолжений боковых сторон AB и DC, S — площадь треугольника BOC, $MN = x$ — искомый отрезок, $BC = a$ и $AD = b$ $(b > a)$ (рис. 61, $б$). Тогда $S_{MNO} - S = S_{AOD} - S_{MNO}$, или

$$\frac{x^2}{a^2} \cdot S - S = \frac{b^2}{a^2} \cdot S - \frac{x^2}{a^2} \cdot S.$$

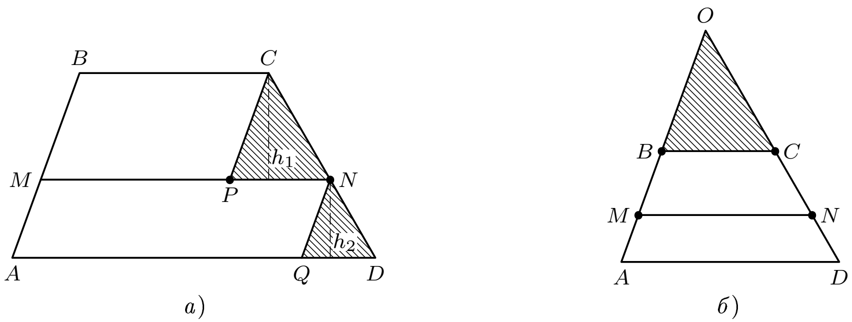

Рис. 61

Отсюда находим, что $x^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$.

Ответ. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Пример 3. Точки K и N расположены соответственно на сторонах AB и AC треугольника ABC, причем $AK = BK$ и $AN = 2NC$. В каком отношении отрезок KN делит медиану AM треугольника ABC?

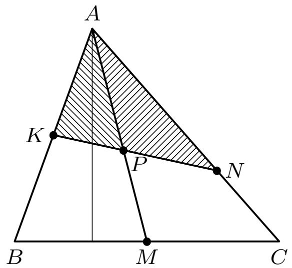

Рис. 62

Решение. Пусть прямые AM и KN пересекаются в точке P (рис. 62). Обозначим через S площадь треугольника ABC, а через k — отношение $\frac{AP}{AM}$. Тогда

$$S_{ABM} = S_{ACM} = \frac{1}{2}S,$$
$$S_{AKN} = \frac{AK}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot S = \frac{1}{3}S,$$
$$S_{AKP} = \frac{AK}{AB} \cdot \frac{AP}{AM} \cdot S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \frac{1}{2}S = \frac{1}{4}kS,$$
$$S_{ANP} = \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AP}{AM} \cdot S_{ACM} = \frac{2}{3} \cdot k \cdot \frac{1}{2}S = \frac{1}{3}kS.$$

Поскольку $S_{AKN} = S_{AKP} + S_{ANP}$, получим уравнение

$$\frac{1}{3}S = \frac{1}{4}kS + \frac{1}{3}kS,$$

откуда $k = \frac{4}{7}$. Следовательно, $AP : PN = 4 : 3$.

Задачи первого уровня

2.514. Докажите, что отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

2.515. Докажите, что высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит треугольник на два подобных треугольника.

2.516^0. Докажите, что прямая, параллельная стороне данного треугольника и пересекающая две другие его стороны (или их продолжения), образует с этими сторонами треугольник, подобный данному.

2.517^0. Сторона AB треугольника ABC разделена на три равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные стороне BC. Найдите отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника, если $BC = 12$.

2.518. На стороне AC треугольника ABC отложен отрезок AM, равный третьей части стороны AB, а на стороне AB — отрезок AN, равный третьей части стороны AC. Найдите MN, если $BC = 15$.

2.519. Через точку L на стороне BC треугольника ABC поведены прямые, параллельные сторонам AB и AC и пересекающие эти стороны соответственно в точках K и M. Известно, что $BL : LC = 1 : 3$, $AB = 12$ и $AC = 18$. Найдите стороны четырехугольника $AKLM$.

2.520^0. Каждая из сторон AB и AC треугольника ABC разделена соответственно точками M и N в отношении 2:3, считая от точки A. Докажите, что $MN \parallel BC$, и найдите MN, если $BC = 20$.

2.521^0. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники AOD и COB подобны, и найдите коэффициент подобия, если $AD = a$ и $BC = b$.

2.522. Точка M — середина стороны BC параллелограмма $ABCD$. Найдите отношение, в котором отрезок AM делит диагональ BD.

2.523. Точка K лежит на диагонали BD параллелограмма $ABCD$, причем $BK : KD = 1 : 4$. В каком отношении прямая AK делит сторону BC?

2.524. Сторона AD параллелограмма $ABCD$ разделена на n равных частей. Первая точка деления P соединена с вершиной B. Докажите, что прямая BP отсекает на диагонали AC часть AQ, которая равна $\frac{1}{n+1}$ всей диагонали.

2.525. Точка M лежит на боковой стороне AB трапеции $ABCD$, причем $AM : MB = 1 : 2$. Прямая, проходящая через точку M параллельно основаниям AD и BC, пересекает боковую сторону CD в точке N. Найдите MN, если $AD = a$ и $BC = b$.

2.526^0. Боковая сторона трапеции разделена на пять равных частей, и через третью точку деления (считая от конца меньшего основания) проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найдите отрезок прямой, заключенный между сторонами трапеции, если основания трапеции равны a и b и $a > b$.

2.527. Основание треугольника равно 36. Прямая, параллельная основанию, делит треугольник на две равновеликие части. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между сторонами треугольника.

2.528. Через точки, делящие сторону треугольника на три равные части, проведены прямые, параллельные другой стороне треугольника. Найдите площадь четырехугольника, заключенного между этими прямыми, если площадь треугольника равна 24.

2.529. Точка M лежит на боковой стороне AC равнобедренного треугольника ABC с основанием BC, причем $BM = BC$. Найдите MC, если $BC = 1$ и $AB = 2$.

2.530^0. С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок на n равных частей.

2.531. В треугольнике ABC точка K на медиане AM расположена так, что $AK : KM = 1 : 3$. Найдите отношение, в котором прямая, проходящая через точку K параллельно стороне AC, делит сторону BC.

2.532. В прямоугольный треугольник с катетами, равными 6 и 8, вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найдите сторону квадрата.

2.533. Постройте прямоугольный треугольник по отношению его катетов и высоте, опущенной на гипотенузу.

2.534. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и отношению катетов.

2.535⁰. Каждая из боковых сторон трапеции разделена на 5 равных частей. Пусть M и N — вторые точки деления на боковых сторонах, считая от концов меньшего основания. Найдите MN, если основания трапеции равны a и b, $a > b$.

2.536⁰. Основания AD и BC трапеции $ABCD$ равны соответственно a и b. Диагональ AC разделена на три равные части и через ближайшую к A точку деления M проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите отрезок этой прямой, заключенный между диагоналями.

2.537⁰. На диагоналях AC и BD трапеции $ABCD$ взяты соответственно точки M и N, причем $AM : MC = DN : NB = 1 : 4$. Найдите MN, если основания AD и BC равны соответственно a и b ($a > b$).

2.538. Диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$, площадь которого равна 28, пересекаются в точке O. Через середины отрезков BO и DO проведены прямые, параллельные диагонали AC. Найдите площадь части четырехугольника, заключенной между этими прямыми.

2.539⁰. Докажите, что медиана AM треугольника ABC делит пополам любой отрезок с концами на AB и AC, параллельный стороне BC.

Задачи второго уровня

2.540⁰. (*Замечательное свойство трапеции.*) Докажите, что точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований любой трапеции лежат на одной прямой.

2.541⁰. Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключенный внутри трапеции, разбивается ее диагоналями на три части. Докажите, что отрезки, прилегающие к боковым сторонам, равны между собой.

2.542⁰. Через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями a и b проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите отрезок этой прямой, заключенный между боковыми сторонами трапеции.

2.543. Параллельно основаниям трапеции проведите прямую, отрезок которой, заключенный внутри трапеции, делился бы ее диагоналями на три равные части.

2.544. Непараллельные стороны трапеции продолжены до взаимного пересечения и через полученную точку проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найдите длину отрезка этой прямой, ограниченного продолжениями диагоналей, если длины оснований трапеции равны a и b.

2.545. а⁰) Даны отрезки a, b и c. Постройте такой отрезок x, что $x : a = b : c$.

б) Даны отрезки a, b, c, d и e. Постройте отрезок, равный $\frac{abc}{de}$.

2.546. Дан угол и точка внутри него. Проведите через эту точку прямую, отрезок которой, заключенный внутри данного угла, делился бы данной точкой в заданном отношении.

2.547. Диагонали выпуклого четырехугольника равны 12 и 18 и пересекаются в точке O. Найдите стороны четырехугольника с вершинами в точках пересечения медиан треугольников AOB, BOC, COD и AOD.

2.548⁰. AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что треугольник AA_1C подобен треугольнику BB_1C, а треугольник ABC подобен треугольнику A_1B_1C.

2.549. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Найдите B_1C_1, если $\angle A = 60°$ и $BC = 6$.

2.550. Пусть M и N — проекции вершины A параллелограмма $ABCD$ на прямые BC и CD соответственно. Докажите, что треугольник MAN подобен треугольнику ABC.

2.551. Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O. Найдите площадь четырехугольника $OMCD$.

2.552. На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и N так, что прямые MC и NC делят параллелограмм на три равновеликие части. Найдите MN, если $BD = d$.

2.553. Дан выпуклый четырехугольник площади S. Внутри него выбирается точка и отображается симметрично относительно середин его сторон. Получаются четыре вершины нового четырехугольника. Найдите его площадь.

2.554. Две прямые, параллельные основаниям трапеции, делят каждую из боковых сторон на три равные части. Вся трапеция разделена ими на три части. Найдите площадь средней части, если площади крайних S_1 и S_2.

2.555⁰. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции и ее основаниями, равны S_1 и S_2. Найдите площадь трапеции.

2.556. Площадь трапеции равна 27, основания 8 и 16. Найдите площади треугольников, на которые трапеция разделена диагоналями.

2.557. Треугольник и вписанный в него ромб имеют общий угол. Стороны треугольника, заключающие этот угол, относятся как $m : n$. Найдите отношение площади ромба к площади треугольника.

2.558. Точка M лежит на стороне BC треугольника ABC, причем $\angle MAB = \angle ACB$. Найдите AM, если $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

2.559. В треугольник ABC вписан ромб $DECF$ так, что вершина E лежит на отрезке BC, вершина F лежит на отрезке AC и вершина D лежит на отрезке AB. Найдите сторону ромба, если $BC = 12$, $AC = 6$.

2.560. Каждая сторона треугольника разделена на три равные части. Рассмотрим шестиугольник с вершинами в точках деления. Докажите, что три его диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

2.561. Каждая сторона выпуклого четырехугольника разделена на три равные части. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены отрезками. Докажите, что эти отрезки делят друг друга на три равные части.

2.562⁰. Площадь треугольника ABC равна S. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны медианам треугольника ABC.

2.563. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точки касания делят каждую боковую сторону на отрезки длиной m и n, считая от вершины. К окружности проведены три касательные, параллельные каждой из сторон треугольника. Найдите длины отрезков касательных, заключенных между сторонами треугольника.

2.564⁰. Точки K и M лежат на сторонах AB и BC треугольника ABC, причем $AK : BK = 3 : 2$, $BM : MC = 3 : 1$. Через точку B проведена прямая l, параллельная AC. Прямая KM пересекает прямую l в точке P, а прямую AC в точке N. Найдите BP и CN, если $AC = a$.

2.565. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка N так, что $CN = AC$. Точка K — середина стороны AB. В каком отношении прямая KN делит сторону BC?

2.566. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка N так, что $CN = 3AC$. Точка K лежит на стороне AB, причем $AK : KB = 1 : 3$. В каком отношении прямая KN делит сторону BC?

2.567. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка N так, что $AC = 2CN$. Точка M лежит на стороне BC, причем $BM : MC = 1 : 3$. В каком отношении прямая MN делит сторону AB?

2.568. Точки K и M лежат на сторонах соответственно AB и BC треугольника ABC, причем $BK : KA = 1 : 4$, $BM : MC = 3 : 2$. Прямая MK пересекает продолжение стороны AC в точке N. Найдите $AC : CN$.

2.569⁰. Точки M и N лежат на сторонах соответственно AB и AD параллелограмма $ABCD$, причем $AM : MB = 1 : 2$, $AN : ND = 3 : 2$. Отрезки DM и CN пересекаются в точке K. Найдите отношения $DK : KM$, $CK : KN$.

2.570. Точка P лежит на стороне AB треугольника ABC, причем $AP : PB = 1 : 2$. Отрезок CP пересекает медиану AD в точке M. Найдите отношения $AM : MD$, $CM : MP$.

2.571⁰. Точки K и E лежат соответственно на сторонах BC и AB треугольника ABC. Отрезки AK и CE пересекаются в точке M. В каком отношении прямая BM делит сторону AC, если $BK : KC = 1 : 2$, $AE : EB = 2 : 3$?

2.572. На медиане AD треугольника ABC взята точка M, причем $AM : MD = 1 : 3$. В каком отношении прямая BM делит сторону AC?

2.573^0. Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

2.574. Биссектриса внешнего угла A треугольника ABC пересекает продолжение стороны BC и точке M. Докажите, что $BM : MC = AB : AC$.

2.575^0. На стороне BC треугольника ABC взята точка D так, что $BD : AB = DC : AC$. Докажите, что AD — биссектриса треугольника ABC.

2.576. В треугольнике ABC известно, что $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. В каком отношении центр вписанной окружности треугольника делит биссектрису треугольника, проведенную из вершины C?

2.577. В треугольнике ABC сторона AC равна b, сторона AB равна c, а биссектриса A пересекается со стороной BC в точке D, такой, что $DA = DB$. Найдите сторону BC.

2.578. Прямая, параллельная основаниям трапеции, делит ее на две трапеции, площади которых относятся как $1 : 2$. Найдите отрезок этой прямой, заключенный внутри трапеции, если основания равны a и b.

2.579^0. Около окружности описана равнобедренная трапеция. Боковая сторона трапеции равна a, отрезок, соединяющий точки касания боковых сторон с окружностью, равен b. Найдите диаметр окружности.

2.580. Периметр треугольника ABC равен 8. В треугольник вписана окружность и к ней проведена касательная, параллельная стороне AB. Отрезок этой касательной, заключенный между сторонами AC и CB, равен 1. Найдите сторону AB.

2.581. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями S_1, S_2, S_3. Найдите площадь данного треугольника.

2.582. Каждая сторона треугольника разделена на три равные части. Точки деления служат вершинами двух треугольников, пересечение которых — шестиугольник. Найдите площадь этого шестиугольника, если площадь данного треугольника равна S.

2.583. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD = 12$ и $BC = 8$. На продолжении стороны BC выбрана такая точка M, что $CM = 2{,}4$. В каком отношении прямая AM делит площадь трапеции $ABCD$?

2.584^0. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1 так, что

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = 2.$$

Найдите площадь треугольника, вершины которого — попарные пересечения отрезков AA_1, BB_1, CC_1, если площадь треугольника ABC равна 1.

2.585. На сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$ взяты точки соответственно M, N, K и L, причем $AM : MB = CK : KD = 1 : 2$, а $BN : NC = DL : LA = 1 : 3$. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого — пересечения отрезков AN, BK, CL и DM, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1.

2.586. Через точку K, данную на стороне AB треугольника ABC, проведите прямую так, чтобы она разделила треугольник ABC на две равновеликие части.

2.587. В треугольнике со сторонами a, b и c проведены биссектрисы, точки пересечения которых с противолежащими сторонами являются вершинами второго треугольника. Докажите, что отношение площадей этих треугольников равно $\frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}$.

2.588. В треугольнике ABC медиана AD и биссектриса BE перпендикулярны и пересекаются в точке F. Известно, что площадь треугольника DEF равна 5. Найдите площадь треугольника ABC.

2.589. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что площадь треугольника ODC (O — точка пересечения диагоналей) есть среднее пропорциональное между площадями треугольников BOC и AOD. Докажите, что $ABCD$ — трапеция или параллелограмм.

2.590. Даны две параллельные прямые l и l_1. С помощью одной линейки разделите пополам отрезок, расположенный на одной из них.

2.591. Даны две параллельные прямые l и l_1. С помощью одной линейки проведите через данную точку M прямую, параллельную прямым l и l_1.

Задачи третьего уровня

2.592. Равны ли треугольники по двум сторонам и трем углам?

2.593. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E. Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и DCE равна 1, площадь всего четырехугольника не превосходит 4, $AD = 3$. Найдите сторону BC.

2.594. На сторонах AB, AC и BC правильного треугольника ABC расположены точки соответственно C_1, B_1 и A_1, причем треугольник $A_1B_1C_1$ является правильным. Отрезок BB_1 пересекает сторону C_1A_1 в точке O, причем $\dfrac{BO}{OB_1} = k$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A_1B_1C_1$.

§ 2.10. Вписанный угол

Теорема о вписанном угле. *Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.*

Пример 1. Точки A, B и C лежат на окружности. Биссектриса угла BAC пересекает эту окружность в точке M. Найдите углы треугольника BMC, если известно, что $\angle BAC = 80°$.

Решение. Вписанные углы CBM и CAM опираются на одну дугу (рис. 63), поэтому

$$\angle CBM = \angle CAM = \frac{1}{2}\angle BAC = 40°.$$

Аналогично, $\angle BCM = \angle BAM = 40°$. Тогда $\angle BMC = 180° - 40° - 40° = 100°$.

Ответ. 40°, 40°, 100°.

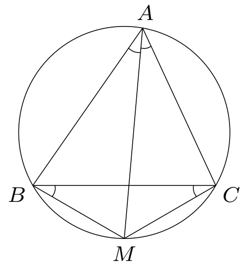

Рис. 63

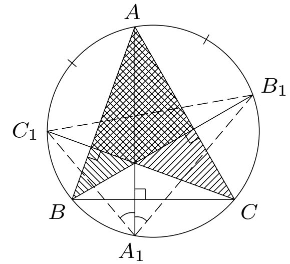

Рис. 64

Пример 2. Продолжения высот остроугольного треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1, BB_1, CC_1.

Решение. Дуги AC_1 и AB_1 (рис. 64) равны, так как на них опираются равные вписанные углы ACC_1 и ABB_1 (каждый из них в сумме с углом BAC составляет 90°). Следовательно, $\angle AA_1C_1 = \angle AA_1B_1$, т. е. луч A_1A — биссектриса угла $C_1A_1B_1$. Аналогично для остальных лучей B_1B и C_1C.

Пример 3. (*Задача Архимеда.*) В дугу AB окружности вписана ломаная AMB из двух отрезков ($AM > MB$). Докажите, что основание перпендикуляра KH, опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM, делит ломаную пополам, т. е. $AH = HM + MB$.

Решение. *Первый способ.* Отложим на продолжении отрезка AM за точку M отрезок MB_1, равный MB (рис. 65, *а*). Пусть прямая KM пересекает отрезок BB_1 в точке P. Тогда

$$\angle BMB_1 = \angle MAB + \angle MBA = \frac{1}{2}(\smile MB + \smile MA) = \frac{1}{2}\smile AKB = \smile AK = 2\angle KMA = 2\angle B_1MP.$$

Поэтому прямая KP делит угол BMB_1 равнобедренного треугольника BMB_1 пополам. Тогда KP — серединный перпендикуляр к отрезку BB_1, $KB_1 = KB = AK$. Поэтому KH — высота и медиана равнобедренного треугольника AKB_1. Следовательно, $AH = HB_1 = HM + MB_1 = HM + MB$.

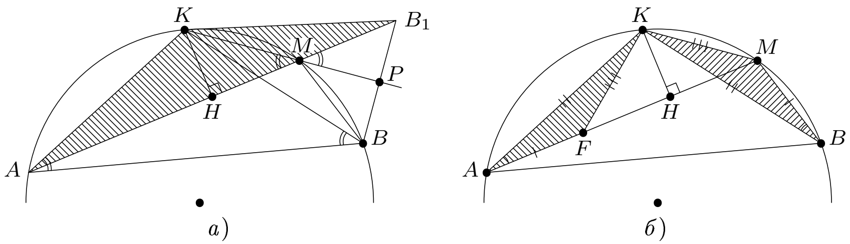

Рис. 65

Второй способ. На луче AM отложим отрезок AF, равный BM (рис. 65, *б*). Тогда треугольники AKF и BKM равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $KF = KM$. Поэтому высота KH равнобедренного треугольника FKM делит основание FM пополам. Пусть точка F лежит между A и H. Тогда $AH = AF + FH = BM + HM$. Аналогично для случая, когда точка H лежит между A и F.

Задачи первого уровня

2.595. Точки A, B и C делят окружность на три дуги, угловые величины которых относятся как $1 : 2 : 3$. Найдите углы треугольника ABC.

2.596. Точки A, B и C расположены на окружности с центром O. Хорды AB, BC и AC соответственно видны из точки O под углами: а) $110°$, $120°$ и $130°$; б) $150°$, $40°$ и $110°$. Найдите углы треугольника ABC.

2.597. Окружность описана около равностороннего треугольника ABC. На дуге BC, не содержащей точку A, расположена точка M, делящая эту дугу в отношении $1 : 2$. Найдите углы треугольника ABM.

2.598. Продолжение высоты CD, опущенной из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC, делит дугу AB описанной окружности на дуги, одна из которых на $40°$ больше другой. Найдите острые углы треугольника.

2.599. Окружность радиуса 4 делится точками A, B и C на дуги, угловые величины которых относятся как $1 : 2 : 3$. Найдите стороны треугольника ABC.

2.600. Точки A, B, C и D последовательно расположены на окружности. Известно, что угловые величины меньших дуг AB, BC, CD и DA относятся как $1 : 3 : 5 : 6$. Найдите углы четырехугольника $ABCD$.

2.601⁰. Докажите, что равные вписанные углы одной окружности опираются на равные хорды. Верно ли обратное?

2.602. Точки A, B и C расположены на окружности. Биссектриса угла BAC пересекает окружность в точке M. Докажите, что треугольник BMC — равнобедренный.

2.603⁰. Докажите, что трапеция, вписанная в окружность,— равнобокая.

2.604. Найдите углы трапеции, если известно, что ее меньшее основание равно одной из боковых сторон, а вершины лежат на окружности с центром на большей стороне.

2.605⁰. Докажите, что у четырехугольника, вписанного в окружность, сумма противоположных углов равна $180°$.

2.606⁰. Докажите, что угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними.

2.607. Окружность касается сторон угла с вершиной A в точках B и C. Найдите угловые величины дуг, на которые окружность делится точками B и C, если $\angle BAC = 70°$.

2.608⁰. Угловые величины противоположных дуг, высекаемых на окружности пересекающимися хордами, равны α и β. Найдите угол между хордами.

2.609⁰. Угловые величины дуг, заключенных между двумя хордами, продолжения которых пересекаются вне круга, равны α и β ($\alpha > \beta$). Под каким углом пересекаются продолжения хорд?

Задачи второго уровня

2.610. Рассмотрим четыре сегмента, отсекаемых от окружности вписанным в нее четырехугольником и расположенных вне этого четырехугольника. Найдите сумму углов, вписанных в эти сегменты.

2.611. Трапеция с высотой h вписана в окружность. Боковая сторона видна из центра окружности под углом $120°$. Найдите среднюю линию трапеции.

2.612. В круге провели три хорды AB, BC, CD и отметили их середины M, N, K. Докажите, что $\angle BMN = \angle NKC$ или $\angle BMN + \angle NKC = 180°$.

2.613⁰. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что $\angle CA_1B_1 = \angle CAB$.

2.614. Из точки P, расположенной внутри острого угла BAC, опущены перпендикуляры PC_1 и PB_1 на прямые AB и AC. Докажите, что $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P$.

2.615. Внутри угла с вершиной O взята некоторая точка M. Луч OM образует со сторонами угла углы, один из которого больше другого на $10°$; A и B — проекции точки M на стороны угла. Найдите угол между прямыми AB и OM.

2.616. Точка M симметрична вершине C прямоугольного треугольника ABC относительно прямой, проходящей через вершину B прямого угла и середину гипотенузы AC. Найдите угол AMB, если известно, что $\angle CAB = \alpha$ ($\alpha < 45°$).

2.617. Три прямые, проходящие через точку O, образуют друг с другом углы в $60°$. Докажите, что проекции произвольной точки, отличной от O, на эти прямые являются вершинами правильного треугольника.

2.618. Даны диаметр AB, перпендикулярная ему хорда CD и точка M окружности, отличная от точек C и D. Докажите, что лучи MA и MB делят пополам углы, образованные пересечением прямых MC и MD.

2.619. Две окружности пересекаются в точках A и B. Продолжения хорд AC и BD первой окружности пересекают вторую окружность в точках E и F. Докажите, что прямые CD и EF параллельны.

2.620. Точки A, B, C, D лежат на окружности. Точки M, N, K, L — середины дуг AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что $MK \perp NL$.

2.621. На одной из сторон острого угла расположен отрезок AB. Рассмотрим всевозможные углы, под которыми отрезок AB виден из точек, лежащих на второй стороне угла. Докажите, что вершина наибольшего из этих углов — это точка касания окружности, проходящей через точки A и B, со второй стороной угла.

2.622. Продолжения противоположных сторон AB и CD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а сторон AD и BC — в точке N. Докажите, что биссектрисы углов AMD и DNC взаимно перпендикулярны.

2.623⁰. Прямая, проходящая через точку A и центр O вписанной окружности треугольника ABC, вторично пересекает описанную окружность этого треугольника в точке M. Докажите, что треугольники BOM и COM равнобедренные.

2.624. Продолжения биссектрис остроугольного треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что высоты треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1, BB_1, CC_1.

2.625. К двум окружностям, пересекающимся в точках K и M, проведена общая касательная. Докажите, что если A и B — точки касания, то $\angle AMB + \angle AKB = 180°$.

2.626. Две прямые, касающиеся данной окружности в точках A и B, пересекаются в точке C. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на данной окружности.

2.627. Через вершину C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена касательная к описанной окружности этого треугольника. Расстояния от вершин A и B до касательной равны a и b. Найдите катеты треугольника ABC.

2.628. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E; AD — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AE = ED$.

2.629. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку K первой окружности проводятся прямые KA и KB, пересекающие вторую окружность в точках P и Q. Докажите, что хорда PQ второй окружности перпендикулярна диаметру KM первой окружности.

2.630⁰. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M. Докажите, что прямая, проходящая через точку M и середину стороны AD, перпендикулярна BC.

2.631. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE, пересекающиеся в точке O. Известно, что $OE = 1$, а вершина C лежит на окружности, проходящей через точки E, D и O. Найдите стороны и углы треугольника EDO.

2.632⁰. Докажите, что около четырехугольника, сумма противоположных углов которого равна 180°, можно описать окружность.

2.633. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проводится прямая, пересекающая окружности в точках C и D, а затем через точки C и D проводятся касательные к этим окружностям. Докажите, что точки A, C, D и точка P пересечения касательных лежат на одной окружности.

2.634⁰. Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

2.635. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle BCD = 80^\circ$, $\angle ACB = 50^\circ$ и $\angle ABD = 30^\circ$. Найдите $\angle ADB$.

2.636. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ACB = 25^\circ$, $\angle ACD = 40^\circ$ и $\angle BAD = 115^\circ$. Найдите $\angle ADB$.

2.637. Даны четыре окружности, каждая из которых внешним образом касается двух из трех остальных. Докажите, что через точки касания можно провести окружность.

2.638. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и высоте, проведенной из вершины этого угла.

2.639. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и радиусу вписанной окружности.

2.640. Точка E лежит на стороне AC правильного треугольника ABC; точка K — середина отрезка AE. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно прямой AB, и прямая, проходящая через точку C перпендикулярно прямой BC, пересекаются в точке D. Найдите углы треугольника BKD.

2.641. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, $\angle AOC = 60^\circ$. Найдите угол AMC, где M — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

2.642. Угол при вершине A треугольника ABC равен 60°. Биссектрисы BD и CE пересекаются в точке M. Докажите, что $MD = ME$.

2.643. A и B — фиксированные точки окружности, C — произвольная точка окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения: а) биссектрис; б) высот треугольника ABC.

2.644⁰. Докажите, что точка, симметричная точке пересечения высот (ортоцентру) треугольника относительно стороны, лежит на описанной окружности этого треугольника.

2.645⁰. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, AH — высота. Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.

2.646. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC, O — центр его описанной окружности. Докажите, что $CO \perp A_1B_1$.

2.647. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) угол ADB в два раза меньше угла ACB, $BC = AC = 5$, $AD = 6$. Найдите площадь трапеции.

2.648. Четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность. Перпендикуляры, опущенные на сторону AD из вершин B и C, пересекают диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Известно, что $BC = 1$. Найдите EF.

2.649. Сторона AD вписанного четырехугольника $ABCD$ является диаметром описанной окружности, M — точка пересечения диагоналей, P — проекция точки M на AD. Докажите, что M — центр окружности, вписанной в треугольник BCP.

2.650. Вершины чертежного угольника скользят по сторонам прямого угла. Найдите траекторию вершины прямого угла угольника.

2.651⁰. В треугольнике ABC стороны AC и BC не равны. Докажите, что биссектриса угла C делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными из вершины C, тогда и только тогда, когда $\angle C = 90^\circ$.

2.652. Постройте треугольник по точкам пересечения с описанной окружностью продолжений его высоты, медианы и биссектрисы, проведенных из одной вершины.

2.653. Треугольник с вершинами в основаниях высот треугольника ABC называется *ортотреугольником* треугольника ABC. Докажите, что высоты остроугольного треугольника ABC являются биссектрисами его ортотреугольника.

2.654. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, образуют прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 10. Найдите радиус окружности, описанной около исходного треугольника.

2.655. Расстояние от точки пересечения высот треугольника ABC до вершины C равно стороне AB. Найдите угол ACB.

2.656. Расстояние от точки пересечения высот треугольника ABC до вершины C равно радиусу описанной окружности этого треугольника. Найдите угол ACB.

2.657. Из точки A проведены к окружности две касательные AP и AQ (P и Q — точки касания) и секущая AKL (точка K между A и L). Пусть M — середина отрезка KL. Докажите, что $\angle AMP = \angle AMQ$.

2.658⁰. Три окружности равных радиусов проходят через точку M и попарно пересекаются в трех других точках A, B и C. Докажите, что точки A, B и C лежат на окружности того же радиуса, а M — точка пересечения высот треугольника ABC.

Задачи третьего уровня

2.659. Окружность S_2 проходит через центр O окружности S_1 и пересекает ее в точках A и B. Через точку A проведена касательная к окружности S_2; D — вторая точка пересечения этой касательной с окружностью S_1. Докажите, что $AD = AB$.

2.660. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и P. Через точку A проведена касательная AB к окружности S_1, а через точку P — прямая CD, параллельная прямой AB (точки B и C лежат на S_2, точка D — на S_1). Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

2.661. В треугольнике ABC стороны CB и CA равны соответственно a и b. Биссектриса угла ACB пересекает сторону AB в точке K, а описанную около треугольника ABC окружность — в точке M. Окружность, описанная около треугольника AMK, вторично пересекает прямую CA в точке P. Найдите AP.

2.662. Две окружности касаются внутренним образом в точке M. Пусть AB — хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке T. Докажите, что MT — биссектриса угла AMB.

2.663. Точки касания вписанной в данный треугольник окружности соединены отрезками и в полученном треугольнике проведены высоты. Докажите, что прямые, соединяющие основания этих высот, параллельны сторонам исходного треугольника.

2.664. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC больше диагонали BD. Точка M на диагонали AC такова, что около четырехугольника $BCDM$ можно описать окружность. Докажите, что BD — общая касательная окружностей, описанных около треугольников ABM и ADM.

2.665. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности на стороны треугольника (или их продолжения), лежат на одной прямой (*прямая Симсона*).

2.666. Окружность S_1 касается сторон угла ABC в точках A и C. Окружность S_2 касается прямой AC в точке C и проходит через точку B. Окружность S_1 она пересекает в точке M. Докажите, что прямая AM делит отрезок BC пополам.

2.667. К двум окружностям различного радиуса проведены общие внешние касательные AD и BC. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ описанный тогда и только тогда, когда окружности касаются.

Раздел третий
9 класс

§ 3.1. Пропорциональные отрезки в круге

Теорема. *Произведения отрезков пересекающихся хорд окружности равны.*

Доказательство. Пусть хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M (рис. 66). Треугольники AMC и DMB подобны по двум углам (углы BAC и BDC равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу), поэтому $\frac{AM}{DM} = \frac{CM}{BM}$, откуда $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.

Теорема о касательной и секущей. *Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной.*

Доказательство. Пусть через точку M (рис. 67), лежащую вне окружности, проходят две прямые: одна из них касается окружности в точке A, а вторая пересекает эту окружность в точках B и C, причем точка B лежит между точками M и C. Требуется доказать, что $BM \cdot CM = AM^2$.

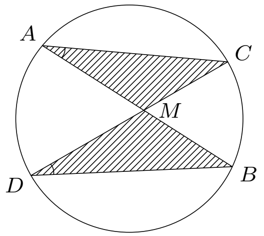

Рис. 66

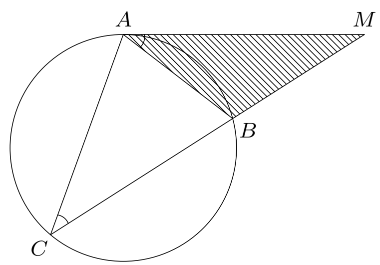

Рис. 67

Соединим точку A с точками B и C. Рассмотрим треугольники AMB и CMA. Угол при вершине M у них общий, а угол BAM — это угол между касательной AM и хордой AB. Он равен половине дуги AB, заключенной между ними. Но половине этой дуги равен и вписанный угол ACB. Поэтому треугольники AMB и CMA подобны по двум углам. Следовательно, $\frac{AM}{CM} = \frac{BM}{AM}$, откуда $BM \cdot CM = AM^2$.

Пример 1. Точка M внутри окружности делит хорду этой окружности на отрезки, равные a и b. Через точку M проведена хорда AB, делящаяся точкой M пополам. Найдите AB.

Решение. Обозначим $AM = BM = x$ (рис. 68). По теореме об отрезках пересекающихся хорд $x^2 = ab$, откуда $x = \sqrt{ab}$. Следовательно, $AB = 2x = 2\sqrt{ab}$.

Пример 2. Из точки M, расположенной вне окружности на расстоянии $\sqrt{7}$ от центра, проведены касательная MA (A — точка касания) и секущая, внутренняя часть которой вдвое меньше внешней и равна радиусу окружности. Найдите радиус окружности.

Решение. Пусть секущая пересекает окружность с центром O (рис. 69) в точках B и C (B между C и M). Обозначим через x радиус окружности. Тогда $BC = x$ и $BM = 2x$. Если AM — касательная к окружности, то по теореме о касательной и секущей $AM^2 = BM \cdot CM = 2x \cdot 3x = 6x^2$. С другой стороны, по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника OAM находим, что $AM^2 = OM^2 - OA^2 = 7 - x^2$. Из уравнения $6x^2 = 7 - x^2$ находим, что $x = 1$.

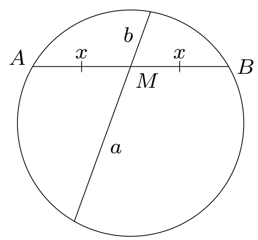

Рис. 68

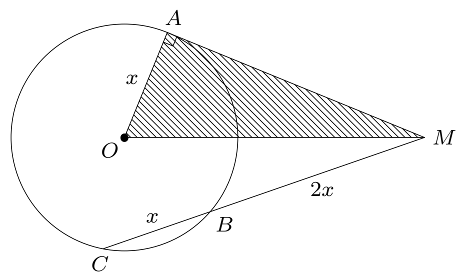

Рис. 69

Пример 3. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M, причем $AM = AC$. Докажите, что продолжения высот AA_1 и DD_1 треугольников CAM и BDM пересекаются на окружности.

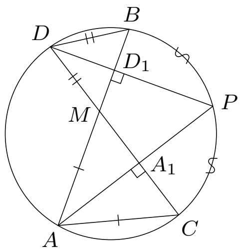

Рис. 70

Решение. Треугольники CAM и BDM подобны по двум углам (рис. 70). По условию один из них равнобедренный, значит, второй также равнобедренный. Высоты равнобедренных треугольников, проведенные к основанию, являются биссектрисами углов при вершинах, т. е. лучи AA_1 и DD_1 — биссектрисы равных вписанных углов BAC и BDC. Каждая из этих биссектрис делит дугу BC пополам, следовательно, они проходят через одну точку на окружности — середину P дуги BC.

Задачи первого уровня

3.1. Диагонали AC и BD вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M. Известно, что $AM = 3$, $BM = 4$ и $CM = 6$. Найдите CD.

3.2. Хорды AB и CD пересекаются в точке P. Известно, что $AB = CD = 12$, $\angle APC = 60^\circ$ и $AC = 2 \cdot BD$. Найдите стороны треугольника APC.

3.3. Через точку M проведены две прямые. Одна из них касается некоторой окружности в точке A, а вторая пересекает эту окружность в точках B и C, причем $BC = 7$ и $BM = 9$. Найдите AM.

3.4. Радиусы двух концентрических окружностей относятся как $1 : 2$. Хорда большей окружности делится меньшей окружностью на три равные части. Найдите отношение этой хорды к диаметру большей окружности.

3.5. Дана точка P, удаленная на расстояние, равное 7, от центра окружности, радиус которой равен 11. Через точку P проведена хорда, равная 18. Найдите отрезки, на которые делится хорда точкой P.

3.6. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке K, известно, что $AB = a$, $BK = b$, $AK = c$, $CD = d$. Найдите AC.

3.7^0. Точка M лежит внутри окружности радиуса R и удалена от центра на расстояние d. Докажите, что для любой хорды AB этой окружности, проходящей через точку M, произведение $AM \cdot BM$ одно и то же. Чему оно равно?

3.8^0. Точка M лежит вне окружности радиуса R и удалена от центра на расстояние d. Докажите, что для любой прямой, проходящей через точку M и пересекающей окружность в точках A и B, произведение $AM \cdot BM$ одно и то же. Чему оно равно?

3.9. Из точки A проведены два луча, пересекающие данную окружность: один — в точках B и C, другой — в точках D и E. Известно, что $AB = 7$, $BC = 7$, $AD = 10$. Найдите DE.

3.10. Из внешней точки проведены к окружности секущая длиной 12 и касательная, равная $\frac{2}{3}$ внутреннего отрезка секущей. Найдите длину касательной.

3.11. В квадрат $ABCD$ со стороной a вписана окружность, которая касается стороны CD в точке E. Найдите хорду, соединяющую точки, в которых окружность пересекается с прямой AE.

3.12. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине C катет BC равен a, радиус вписанной окружности равен r. Вписанная окружность касается катета AC в точке D. Найдите хорду, соединяющую точки пересечения окружности с прямой BD.

3.13. Из точки A, лежащей вне окружности, проведены к окружности касательная и секущая. Расстояние от точки A до точки касания равно 16, а расстояние от точки A до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32. Найдите радиус окружности, если расстояние от центра окружности до секущей равно 5.

Задачи второго уровня

3.14. Диагональ AC вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ является биссектрисой угла BAD. Докажите, что прямая BD отсекает от треугольника ABC подобный ему треугольник.

3.15. Пересекающиеся хорды окружности делятся точкой пересечения в одном и том же отношении. Докажите, что эти хорды равны между собой.

3.16. Каждая из двух равных пересекающихся хорд окружности делится точкой пересечения на два отрезка. Докажите, что отрезки первой хорды соответственно равны отрезкам второй.

3.17. В круге проведены две хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M; K — точка пересечения биссектрисы угла BMD с хордой BD. Найдите отрезки BK и KD, если $BD = 3$, а площади треугольников CMB и AMD относятся как $1 : 4$.

3.18^0. Две окружности пересекаются в точках A и B. Проведены хорды AC и AD этих окружностей так, что хорда одной окружности касается другой окружности. Найдите AB, если $CB = a$, $DB = b$.

3.19. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Известно, что $BC = 3 \cdot MN$ и $AB = 12$. Найдите AN.

3.20^0. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.

3.21. В угол вписаны две окружности; одна из них касается сторон угла в точках K_1 и K_2, а другая — в точках L_1 и L_2. Докажите, что прямая K_1L_2 высекает на этих двух окружностях равные хорды.

3.22. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K. Найдите KC, если $BC = 4$ и $AK = 6$.

3.23. Продолжение медианы треугольника ABC, проведенной из вершины A, пересекает описанную окружность в точке D. Найдите BC, если $AC = DC = 1$.

3.24. Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник правильный.

3.25. Сторона AD квадрата $ABCD$ равна 1 и является хордой некоторой окружности, причем остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Касательная BK, проведенная из вершины B к этой же окружности, равна 2. Найдите диаметр окружности.

3.26. Через вершину наибольшего угла треугольника со сторонами 6, 8 и 10 проведена касательная к окружности, описанной около этого треугольника. Найдите отрезок касательной, заключенный между точкой касания и точкой пересечения с продолжением наибольшей стороны треугольника.

3.27. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB = 3$ и $BC = 4$ через середины сторон AB и AC проведена окружность, касающаяся катета BC. Найдите длину отрезка гипотенузы AC, который лежит внутри этой окружности.

3.28. Точка B расположена между точками A и C. На отрезках AB и AC как на диаметрах построены окружности. Прямая, перпендикулярная AC и проходящая через точку B, пересекает бóльшую окружность в точке D. Прямая, проходящая через точку C, касается меньшей окружности в точке K. Докажите, что $CD = CK$.

3.29^0. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.

3.30. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках D и E соответственно. Найдите высоту треугольника ABC, опущенную из вершины A, если $AB = 5$, $AC = 2$, а точки A, D, E, C лежат на одной окружности.

3.31. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) проведены биссектрисы AD, BE, CF. Найдите BC, если известно, что $AC = 1$, а вершина A лежит на окружности, проходящей через точки D, E, F.

3.32. Две окружности внутренне касаются. Прямая, проходящая через центр большей окружности, пересекает ее в точках A и D, а меньшую окружность — в точках B и C. Найдите отношение радиусов окружностей, если $AB : BC : CD = 3 : 7 : 2$.

3.33. Точки A, B и C лежат на одной прямой (точка B расположена между точками A и C). Через точки A и B проводятся окружности, а через точку C — касательные к ним. Найдите геометрическое место точек касания.

3.34. Окружность и прямая касаются в точке M. Из точек A и B этой окружности опущены перпендикуляры на прямую, равные a и b соответственно. Найдите расстояние от точки M до прямой AB.

3.35. Из точки A, находящейся на расстоянии 5 от центра окружности радиуса 3, проведены две секущие AKC и ALB, угол между которыми равен 30° (K, C, L, B — точки пересечения секущих с окружностью). Найдите площадь треугольника AKL, если площадь треугольника ABC равна 10.

3.36. В окружности проведены три попарно пересекающиеся хорды. Каждая хорда разделена точками пересечения на три равные части. Найдите радиус окружности, если одна из хорд равна a.

3.37. В окружность вписан треугольник. Вторая окружность, концентрическая с первой, касается одной стороны треугольника и делит каждую из двух других сторон на три равные части. Найдите отношение радиусов этих окружностей.

3.38. Хорда AB стягивает дугу окружности, равную 120°. Точка C лежит на этой дуге, а точка D лежит на хорде AB. При этом $AD = 2$, $BD = 1$, $DC = \sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника ABC.

3.39. Окружность касается сторон AB и AD прямоугольника $ABCD$ и проходит через вершину C. Сторону DC она пересекает в точке N. Найдите площадь трапеции $ABND$, если $AB = 9$ и $AD = 8$.

3.40. Дан угол с вершиной O и окружность, касающаяся его сторон в точках A и B. Из точки A параллельно OB проведен луч, пересекающий окружность в точке C. OC пересекает окружность в точке E. Прямые AE и OB пересекаются в точке K. Докажите, что $OK = KB$.

3.41⁰. Точки A_1 и B_1 принадлежат соответственно сторонам OA и OB угла AOB (не равного 180°) и $OA\cdot OA_1 = OB\cdot OB_1$. Докажите, что точки A, B, A_1, B_1 принадлежат одной окружности.

3.42. Через точку P, лежащую на общей хорде двух пересекающихся окружностей, проведены хорда KM первой окружности и хорда LN второй окружности. Докажите, что четырехугольник с вершинами в точках K, L, M и N — вписанный.

3.43⁰. Точка M находится на продолжении хорды AB. Докажите, что если точка C окружности такова, что $MC^2 = MA \cdot MB$, то MC — касательная к окружности.

3.44⁰. Докажите, что квадрат биссектрисы треугольника равен произведению сторон, ее заключающих, без произведения отрезков третьей стороны, на которые она разделена биссектрисой.

Задачи третьего уровня

3.45. Постройте окружность, проходящую через две данные точки A и B и касающуюся данной окружности S.

3.46⁰. На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Докажите, что три общие хорды каждой пары этих окружностей пересекаются в одной точке.

3.47. На продолжении хорды KL окружности с центром O взята точка A и из нее проведены касательные AP и AQ; M — середина отрезка PQ. Докажите, что $\angle MKO = \angle MLO$.

3.48. Две окружности радиусов r и R ($r < R$) внешним образом касаются друг друга. Прямая касается этих окружностей в точках M и N. В точках A и B окружности касаются внешним образом третьей окружности. Прямые AB и MN пересекаются в точке C. Из точки C проведена касательная к третьей окружности (D — точка касания). Найдите CD.

3.49. На боковых сторонах трапеции как на диаметрах построены окружности. Докажите, что отрезки касательных, проведенных из точки пересечения диагоналей трапеции к этим окружностям, равны между собой.

3.50. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от точки A до прямых BC, DC и DE равны соответственно a, b, c. Найдите расстояние от вершины A до прямой BE.

3.51. (*Теорема Птолемея.*) Докажите, что если четырехугольник вписан в окружность, то сумма произведений длин двух пар его противоположных сторон равна произведению длин его диагоналей.

§ 3.2. Теорема косинусов

Теорема косинусов. *Пусть a, b, c — стороны треугольника*; α — *угол, противолежащий стороне a. Тогда*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha.$$

Пример 1. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна 9, катет $BC = 3$. На гипотенузе взята точка M, причем $AM : MB = 1 : 2$. Найдите CM.

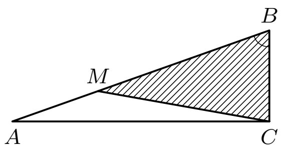

Рис. 71

Решение. Из прямоугольного треугольника ABC (рис. 71) находим, что $\cos\angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{3}$. В треугольнике BMC известны стороны $BC = 3$, $BM = 6$ и косинус угла между ними. По теореме косинусов

$$CM^2 = BC^2 + BM^2 - 2BC \cdot BM \cdot \cos\angle B = 9 + 36 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} = 33.$$

Следовательно, $CM = \sqrt{33}$.

Пример 2. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Известно, что $BC = a$, $AC = b$, $\angle AOB = 120^\circ$. Найдите сторону AB.

Решение. Поскольку $\angle AOB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C$ (см. задачу **1.116⁰**), то $\angle C = 2\angle AOB - 180^\circ = 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$ (рис. 72). По теореме косинусов

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos\angle C = \\ = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{1}{2} = a^2 + b^2 - ab.$$

Следовательно, $AB = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$.

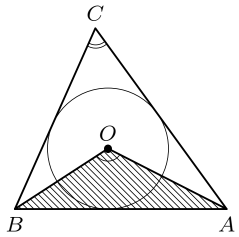

Рис. 72

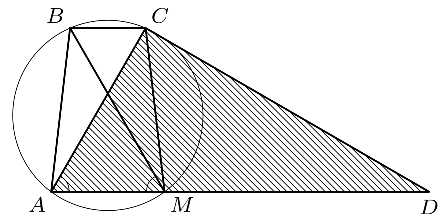

Рис. 73

Пример 3. В трапеции $ABCD$ основание AD равно 16, а боковая сторона CD равна $8\sqrt{3}$. Окружность, проходящая через точки A, B и C, пересекает прямую AD в точке M, $\angle AMB = 60^\circ$. Найдите BM.

Решение. Трапеция $ABCM$ вписана в окружность (рис. 73), поэтому она равнобедренная. Следовательно, $\angle CAM = \angle AMB = 60^\circ$.

Обозначим $AC = x$ и применим теорему косинусов к треугольнику ACD:

$$(8\sqrt{3})^2 = x^2 + 16^2 - 16x.$$

Отсюда находим, что $x = 8$.

Задачи первого уровня

3.52. Стороны треугольника равны 5, 8, 10. Верно ли, что треугольник остроугольный?

3.53. Сумма квадратов двух сторон треугольника больше квадрата третьей стороны. Докажите, что против третьей стороны лежит острый угол.

3.54. Дан равносторонний треугольник со стороной a. Найдите отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, делящей противоположную сторону в отношении $2 : 1$.

3.55. Одна из сторон треугольника вдвое больше другой, а угол между этими сторонами равен 60°. Докажите, что треугольник прямоугольный.

3.56. Сторона треугольника равна $2\sqrt{7}$, а две другие стороны образуют угол в 30° и относятся как $1 : 2\sqrt{3}$. Найдите эти стороны.

3.57. Одна из сторон параллелограмма равна 10, а диагонали равны 20 и 24. Найдите косинус острого угла между диагоналями.

3.58. Угол при вершине D трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC равен 60°. Найдите диагонали трапеции, если $AD = 10$, $BC = 3$ и $CD = 4$.

3.59. Одна из сторон треугольника равна 6, вторая сторона равна $2\sqrt{7}$, а противолежащий ей угол равен 60°. Найдите третью сторону треугольника.

3.60. На продолжении боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC за вершину A взята точка D, причем $AD = 2 \cdot AB$. Известно, что $AB = AC$, $\angle BAC = 120^\circ$. Докажите, что треугольник BDC равнобедренный.

3.61. Точки M и N лежат соответственно на сторонах AD и BC ромба $ABCD$, причем $DM : AM = BN : NC = 2 : 1$. Найдите MN, если известно, что сторона ромба равна a, а $\angle BAD = 60^\circ$.

3.62^{0}. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его четырех сторон.

3.63. Диагональ параллелограмма, равная b, перпендикулярна стороне параллелограмма, равной a. Найдите вторую диагональ параллелограмма.

3.64. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной 4, проведена медиана к боковой стороне. Найдите основание треугольника, если эта медиана равна 3.

3.65. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна 5. Найдите боковую сторону.

3.66^{0}. Стороны треугольника равны a, b, c. Найдите медиану, проведенную к стороне, равной c.

3.67. Стороны треугольника равны 11, 13 и 12. Найдите медиану, проведенную к большей стороне.

3.68. В треугольнике две стороны равны 11 и 23, а медиана, проведенная к третьей, равна 10. Найдите третью сторону.

3.69. Докажите, что отношение суммы квадратов медиан треугольника к сумме квадратов его сторон равно $\frac{3}{4}$.

3.70. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$ и $AD = 2$. Найдите AC.

3.71. Можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность, если $\angle ADC = 30^\circ$, $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 6$?

3.72. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20. Найдите биссектрису угла при основании.

3.73. В треугольнике ABC известно, что $AC = 13$, $AB = 14$, $BC = 15$. На стороне BC взята точка M, для которой $CM : MB = 1 : 2$. Найдите AM.

3.74. В треугольнике ABC известно, что $AB = 12$, $AC = 15$, $BC = 18$. Найдите биссектрису треугольника, проведенную из вершины наибольшего угла.

3.75. Найдите косинусы углов трапеции с основаниями, равными 3 и 7 и боковыми сторонами, равными 2 и 5.

3.76. Медианы треугольника ABC, проведенные из вершин B и C, равны 6 и 9 и пересекаются в точке M. Известно, что $\angle BMC = 120^\circ$. Найдите стороны треугольника.

Задачи второго уровня

3.77. Стороны параллелограмма равны 2 и 4, а угол между ними равен 60°. Через вершину этого угла проведены прямые, проходящие через середины двух других сторон параллелограмма. Найдите косинус угла между этими прямыми.

3.78. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке M, при этом $AM = 1$, $BM = 4$. Найдите CM, если известно, что $\angle BAC = 120^\circ$.

3.79. Основания трапеции равны 1 и 6, а диагонали — 3 и 5. Под каким углом видны основания из точки пересечения диагоналей?

3.80. В выпуклом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны a и b и пересекаются под углом 60°. Найдите диагонали четырехугольника.

3.81. Диагонали выпуклого четырехугольника равны c и d и пересекаются под углом 45°. Найдите отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника.

3.82. Центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, удален от вершин острых углов на расстояния a и b. Найдите гипотенузу.

3.83. Точка M лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$ с углом $45°$ при вершине A, причем $\angle AMD = 90°$ и $BM : MC = 2 : 3$. Найдите отношение соседних сторон параллелограмма.

3.84. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая основание этого треугольника в точке D. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, если $AD = \sqrt{3}$, а угол $\angle ABC = 120°$.

3.85. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, касается гипотенузы в точке M. Найдите расстояние от точки M до вершины прямого угла.

3.86. Точка M лежит на стороне AC равностороннего треугольника ABC со стороной $3a$, причем $AM : MC = 1 : 2$. Точки K и L на сторонах AB и BC являются вершинами другого равностороннего треугольника MKL. Найдите его стороны.

3.87. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE. Найдите AC, если $BC = a$, $AB = b$, $\dfrac{DE}{AC} = k$.

3.88. В окружности проведены хорды AB и BC, причем $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3\sqrt{3}$, $\angle ABC = 60°$. Найдите длину той хорды окружности, которая делит угол ABC пополам.

3.89. Дан треугольник ABC. Известно, что $AB = 4$, $AC = 2$ и $BC = 3$. Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке K. Прямая, проходящая через точку B параллельно AC, пересекает продолжение биссектрисы AK в точке M. Найдите KM.

3.90. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB, BC, AC в точках M, D, N соответственно. Найдите MD, если известно, что $NA = 2$, $NC = 3$, $\angle BCA = 60°$.

3.91. В окружности радиуса $R = 4$ проведены хорда AB и диаметр AK, образующий с хордой угол $22{,}5°$. В точке B проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение

диаметра AK в точке C. Найдите медиану AM треугольника ABC.

3.92. В треугольнике ABC сторона AC больше стороны AB. Докажите, что медиана, проведенная из вершины B, меньше медианы, проведенной из вершины C.

3.93. Стороны треугольника равны a, b и c. Найдите биссектрису треугольника, проведенную к стороне a.

3.94. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3\sqrt{39}$ и $BC = \sqrt{39}$. Кроме того, дано, что угол BAD равен $30°$ и угол ADC равен $60°$. Через точку D проходит прямая, делящая трапецию на две равновеликие фигуры. Найдите длину отрезка этой прямой, находящегося внутри трапеции.

3.95. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $AB = a$, $BC = b$, $\angle ABC = \alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.

3.96. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки окружности до вершин правильного вписанного в эту окружность треугольника есть величина постоянная, не зависящая от положения точки на окружности.

3.97. Окружности радиусов r и R касаются внутренним образом. Найдите сторону правильного треугольника, одна вершина которого совпадает с точкой касания, а две другие лежат на разных данных окружностях.

3.98. Сторона ромба $ABCD$ равна a, а острый угол равен α. На отрезках AD и BC построены как на сторонах вне ромба правильные треугольники. Найдите расстояние между центрами этих треугольников.

3.99. В окружность радиуса 2 вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Из точки K, лежащей на продолжении стороны AF так, что $KA < KF$ и $KA = \sqrt{11} - 1$, проведена секущая KH, пересекающая окружность в точках N и H. Известно, что внешняя часть секущей KH равна 2 ($KN = 2$), а угол NFH тупой. Найдите угол HKF.

3.100. Окружность, вписанная в треугольник ABC, делит медиану BM на три равные части. Найдите отношение $BC : CA : AB$.

3.101. Медиана AD остроугольного треугольника ABC равна 5. Проекции этой медианы на стороны AB и AC равны 4 и $2\sqrt{5}$ соответственно. Найдите сторону BC.

3.102. (*Теорема Стюарта.*) Точка D расположена на стороне BC треугольника ABC. Докажите, что

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD.$$

Задачи третьего уровня

3.103. Даны отрезки a и b. Постройте отрезок $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

3.104. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC. Окружность радиуса $\frac{2}{\sqrt{3}}$, вписанная в треугольник ABD, касается стороны AB в точке M, а окружность радиуса $\sqrt{3}$, вписанная в треугольник BCD, касается стороны BC в точке N. Известно, что $BM = 6$, $BN = 5$. Найдите стороны треугольника ABC.

3.105. Сторона BC треугольника ABC равна 4, сторона AB равна $2\sqrt{19}$. Известно, что центр окружности, проходящей через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла C. Найдите AC.

§ 3.3. Теорема синусов

Пусть a, b, c — стороны треугольника; α, β, γ — противолежащие им углы; R — радиус описанной окружности.

Теорема синусов.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Пример 1. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 5 и 8 и углом между ними, равным 60°.

Решение. Пусть ABC — треугольник, в котором $AB = 5$, $AC = 8$, $\angle BAC = 60^\circ$, R — искомый радиус описанной окружности (рис. 74). По теореме косинусов

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC} = \sqrt{25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7.$$

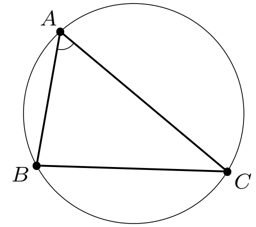

Рис. 74

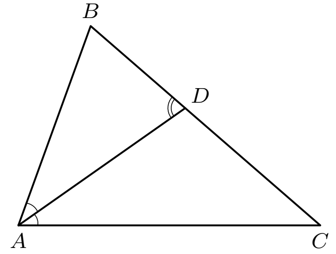

Рис. 75

Следовательно, $R = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Пример 2. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$, $AB = a$; AD — биссектриса. Найдите BD.

Решение. Угол BDA — внешний угол треугольника ADC (рис. 75), поэтому $\angle ADB = \angle DAC + \angle ACB = \frac{\alpha}{2} + \beta$. По теореме синусов из треугольника ADB находим, что

$$\frac{AB}{\sin\angle ADB} = \frac{BD}{\sin\angle BAD}, \quad \text{или} \quad \frac{a}{\sin(\alpha/2 + \beta)} = \frac{BD}{\sin(\alpha/2)},$$

откуда

$$BD = \frac{a\sin(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2 + \beta)}.$$

Пример 3. Дан треугольник ABC, в котором $AC = b$ и $\angle ABC = \alpha$. Найдите радиус окружности, проходящей через центр вписанной в треугольник ABC окружности и вершины A и C.

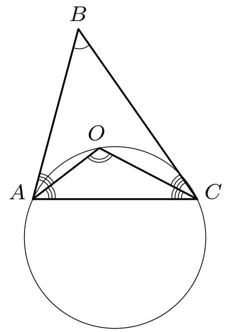

Рис. 76

Решение. Пусть O — центр вписанной в треугольник ABC окружности (рис. 76), R — искомый радиус. Так как O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, то $\angle AOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ABC = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$ (см. задачу $\mathbf{1.116^0}$). Тогда

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle AOC} = \frac{b}{2\sin(90^\circ + \alpha/2)} = \frac{b}{2\cos(\alpha/2)}.$$

Задачи первого уровня

3.106. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 2, а угол при вершине равен 120°. Найдите диаметр описанной окружности.

3.107. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами a, b и b.

3.108. Под каким углом видна из точек окружности хорда, равная радиусу?

3.109. Дан треугольник ABC, в котором $AC = \sqrt{2}$, $BC = 1$, $\angle ABC = 45^\circ$. Найдите угол BAC.

3.110. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника с острым углом 30°, если известно, что биссектриса, проведенная из вершины прямого угла, равна a.

3.111. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 13, 14, 15.

3.112. Боковая сторона равнобокой трапеции равна a, средняя линия равна b, а один углов при большем основании равен 30°. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

3.113. Основания равнобокой трапеции равны 9 и 21, высота равна 8. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

3.114. Прямая, пересекающая основание равнобедренного треугольника и проходящая через противоположную вершину, делит этот треугольник на два. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около этих треугольников, равны.

3.115. С помощью теоремы синусов докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

3.116. В треугольнике известны сторона a и два прилежащих к ней угла β и γ. Найдите биссектрису, проведенную из вершины третьего угла.

3.117. Медиана AM треугольника ABC равна m и образует со сторонами AB и AC углы α и β соответственно. Найдите эти стороны.

Задачи второго уровня

3.118. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. На стороне AB взята точка D, а на стороне AC — точка M, причем CD — биссектриса треугольника ABC, $DM \parallel BC$ и $AM = a$. Найдите CM.

3.119. Углы треугольника равны α, β и γ, а периметр равен P. Найдите стороны треугольника.

3.120. Одна из боковых сторон трапеции образует с бóльшим основанием угол α, а вторая равна a и образует с меньшим основанием угол β. Найдите среднюю линию трапеции, если меньшее основание равно b.

3.121. В окружности радиуса 12 хорда AB равна 6, а хорда BC равна 4. Найдите хорду, соединяющую концы дуги AC.

3.122. Основания трапеции равны 4 и 16. Найдите радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют.

3.123. На стороне AB треугольника ABC во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник. Найдите расстояние между его центром и вершиной C, если $AB = c$ и $\angle C = 120^\circ$.

3.124. Стороны треугольника равны 1 и 2, а угол между ними равен 60°. Через центр вписанной окружности этого треугольника и концы третьей стороны проведена окружность. Найдите ее радиус.

3.125. Докажите, что если стороны a, b и противолежащие им углы α и β треугольника связаны соотношением $\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta}$, то треугольник равнобедренный.

3.126. Две стороны треугольника равны a и b. Найдите третью сторону треугольника, если его угол, лежащий против третьей стороны, в два раза больше угла, лежащего против стороны, равной b.

3.127. Две окружности пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает эти окружности в точках C и D, причем точка A лежит между C и D, а хорды AC и AD пропорциональны радиусам своих окружностей. Докажите, что биссектрисы углов ADB и ACB пересекаются на отрезке AB.

3.128. В окружность вписаны две трапеции с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагональ одной из них равна диагонали другой трапеции.

3.129. Докажите, что для любого треугольника проекция диаметра описанной окружности, перпендикулярного одной стороне треугольника, на прямую, содержащую вторую сторону, равна третьей стороне.

3.130. Каждое из оснований высот треугольника проецируется на его стороны. Докажите, что длина отрезка, соединяющего проекции, не зависит от выбора высоты.

3.131. На окружности, описанной около треугольника ABC, найдите точку M такую, что расстояние между ее проекциями на прямые AC и BC максимально.

3.132. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, AHB, BHC и AHC, равны между собой.

3.133. В окружности проведены две хорды $AB = a$ и $AC = b$. Длина дуги AC вдвое больше длины дуги AB. Найдите радиус окружности.

3.134. Из точки M на окружности проведены три хорды: $MN = 1$, $MP = 6$, $MQ = 2$. При этом углы NMP и PMQ равны. Найдите радиус окружности.

3.135. В треугольнике ABC известно, что $AB = 2$, $AC = 5$, $BC = 6$. Найдите расстояние от вершины B до точки пересечения высот треугольника ABC.

3.136. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а $PQ = 2\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

3.137. Отрезки AB и CD — диаметры одной окружности. Из точки M этой окружности опущены перпендикуляры MP и MQ на прямые AB и CD. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки M.

3.138. Постройте треугольник по углу и радиусам вписанной и описанной окружностей.

3.139. Через вершины A и B треугольника ABC проходит окружность радиуса r, пересекающая сторону BC в точке D. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и C, если $AB = c$ и $AC = b$.

3.140. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α. Найдите отношение радиуса вписанной в данный треугольник окружности к радиусу описанной около него окружности.

3.141. Радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, равен 1. Известно, что на этой окружности лежит центр другой окружности, проходящей через вершины A, C и точку пересечения высот треугольника ABC. Найдите AC.

3.142. Дан треугольник ABC, в котором $\angle BAC = 75^\circ$, $AB = 1$, $AC = \sqrt{6}$. На стороне BC выбрана точка M так, что $\angle BAM = 30^\circ$. Прямая AM пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке N, отличной от A. Найдите AN.

3.143. Даны отрезок AB и на нем точка C. Найдите геометрическое место точек пересечения двух равных окружностей, одна из которых проходит через точки A и C, другая — через точки C и B.

3.144. Продолжения высот AM и CN остроугольного треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках P и Q. Найдите радиус описанной окружности, если $AC = a$, $PQ = \frac{6}{5}a$.

3.145. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

3.146. Две окружности радиусов R и r пересекаются в точках A и B и касаются прямой в точках C и D. N — точка пересечения прямых AB и CD (B между A и N). Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ACD, и отношение высот треугольников NAC и NAD, опущенных из вершины N.

3.147. В треугольник ABC помещены три равных окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Все три окружности имеют одну общую точку. Найдите радиусы этих окружностей, если радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC равны R и r.

3.148. В выпуклом четырехугольнике $ABKC$ сторона $AB = \sqrt{3}$, диагональ BC равна 1, а углы ABC, BKA и BKC равны 120°, 30° и 60° соответственно. Найдите сторону BK.

3.149. В треугольнике ABC известно, что $AB = 20$, $AC = 24$. Известно также, что вершина C, центр вписанной в треугольник ABC окружности и точка пересечения биссектрисы угла A со стороной BC лежат на окружности, центр которой расположен на стороне AC. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности.

Задачи третьего уровня

3.150. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Известно, что $AD = 2$, $\angle ABD = \angle ACD = 90°$ и расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD, равно $\sqrt{2}$. Найдите BC.

3.151. Постройте треугольник по двум сторонам так, чтобы медиана, проведенная к третьей стороне, делила угол треугольника в отношении 1 : 2.

3.152. Диагональ AC квадрата $ABCD$ совпадает с гипотенузой прямоугольного треугольника ACK, причем точки B и K лежат по одну сторону от прямой AC. Докажите, что $BK = \frac{|AK-CK|}{\sqrt{2}}$ и $DK = \frac{AK+CK}{\sqrt{2}}$.

3.153. На окружности, описанной около треугольника ABC, взята точка M. Прямая MA пересекается с прямой BC в точке L, а прямая CM — с прямой AB в точке K. Известно, что $AL = a$, $BK = b$, $CK = c$. Найдите BL.

3.154. В треугольнике ABC угол ABC равен α, угол BCA равен 2α. Окружность, проходящая через точки A, C и центр описанной около треугольника ABC окружности, пересекает сторону AB в точке M. Найдите отношение $AM : AB$.

§ 3.4. Площадь

Пусть a, b, c — стороны треугольника; α, β, γ — противолежащие им углы; h_a — высота, проведенная к прямой, содержащей

сторону a; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; p — полупериметр.

Формулы площади треугольника:

$S = \frac{1}{2}ah_a$,

$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$,

$S = pr$,

$S = \frac{abc}{4R}$,

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (*формула Герона*).

Пример 1. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $AB = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

Решение. По теореме синусов $\frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{AB}{\sin\angle C}$ (рис. 77), откуда

$$AC = \frac{AB\sin\angle B}{\sin\angle C} = \frac{a\sin\beta}{\sin(180° - (\alpha+\beta))} = \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle A = \frac{1}{2}\frac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Пример 2. Две стороны треугольника равны 10 и 12, а медиана, проведенная к третьей, равна 5. Найдите площадь треугольника.

Решение. Пусть AM — медиана треугольника ABC, причем $AM = 5$, $AB = 10$, $AC = 12$ (рис. 78). На продолжении медианы AM за точку M отложим отрезок MD, равный AM. Тогда $ABDC$ — параллелограмм с диагоналями BC и AD, а

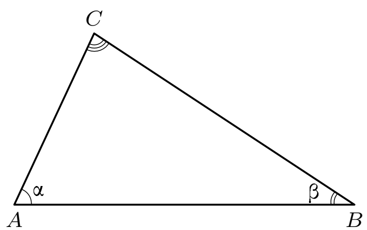

Рис. 77

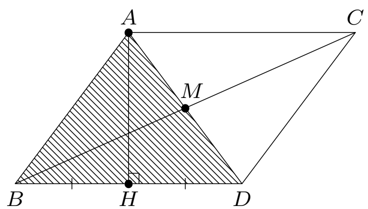

Рис. 78

площадь треугольника ABC равна площади равнобедренного треугольника ABD, в котором $AB = AD = 10$, $BD = 12$. Высоту AH треугольника ABD находим по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ABH:

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{100 - 36} = 8.$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = S_{ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48.$$

Пример 3. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

Решение. Рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$, диагонали AC и BD которого пересекаются в точке O (рис. 79). Пусть $\angle AOB = \alpha$. Через вершины A и C проведем прямые, параллельные диагонали BD, а через вершины B и D — прямые, параллельные диагонали AC. Проведенные прямые при пересечении образуют параллелограмм с углом α при вершине. Его площадь равна $AC \cdot BD \sin\alpha$, а площадь четырехугольника $ABCD$ вдвое меньше, т. е. равна $\frac{1}{2}AC \cdot BD \sin\alpha$.

Заметим, что доказанная формула верна также для невыпуклого четырехугольника.

Пример 4. Вершины ромба расположены на сторонах параллелограмма, а стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма. Найдите отношение площадей ромба и параллелограмма, если отношение диагоналей параллелограмма равно k.

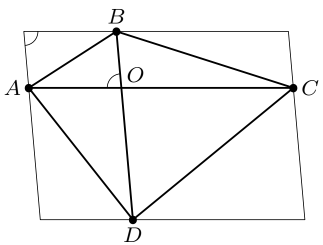

Рис. 79

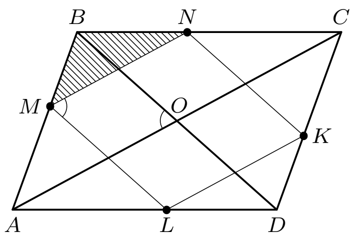

Рис. 80

Решение. Пусть вершины M, N, K и L ромба $MNKL$ расположены соответственно на сторонах AB, BC, CD и AD параллелограмма $ABCD$ (рис. 80), а стороны MN и KN ромба соответственно параллельны диагоналям AC и BD параллелограмма, причем $\frac{AC}{BD} = k$. Если α — угол между диагоналями параллелограмма, то $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$ и $S_{KLMN} = MN \cdot KL \sin\alpha = MN^2 \sin\alpha$, поэтому $\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \frac{2MN^2}{AC \cdot BD}$.

Заметим, что центр ромба совпадает с центром O параллелограмма. Треугольник BMN подобен треугольнику BAC, а треугольник CKN — треугольнику CDB, поэтому $\frac{MN}{AC} = \frac{BN}{BC}$ и $\frac{KN}{BD} = \frac{CN}{BC}$. Отсюда находим, что $\frac{BN}{CN} = \frac{BD}{AC}$, значит,

$$\frac{BN}{BC} = \frac{BD}{BD + AC} = \frac{1}{1 + k} \quad \text{и} \quad MN = \frac{AC \cdot BN}{BC} = \frac{AC}{1 + k}.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \frac{2MN^2}{AC \cdot BD} = \frac{2AC^2}{(1+k)^2} \cdot \frac{1}{AC \cdot BD} = 2 \cdot \frac{AC}{BD} \cdot \frac{1}{(1+k)^2} = \frac{2k}{(1+k)^2}.$$

Задачи первого уровня

3.155. Среди всех треугольников с заданными сторонами AB и AC найдите тот, у которого наибольшая площадь.

3.156. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 8. Найдите высоту, опущенную на гипотенузу.

3.157. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен 60°, а сторона AB равна 3. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E. Найдите площадь треугольника ABE.

3.158. Докажите, что если диагонали выпуклого четырехугольника равны, то его площадь равна произведению отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

3.159. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{15}$, а медиана, проведенная к третьей, равна 2.

3.160. Стороны треугольника равны a, b, b. Найдите высоту, проведенную к стороне, равной b.

3.161. В треугольник со сторонами a и b и углом α между ними вписана полуокружность с диаметром на третьей стороне. Найдите ее радиус.

3.162. а) В треугольнике ABC известно, что $AB = 8$, $AC = 6$, $\angle BAC = 60^\circ$. Найдите биссектрису AM.

б) Стороны треугольника равны a и b, а угол между ними равен α. Найдите биссектрису, проведенную из вершины этого угла.

3.163. Найдите площадь трапеции:

а) с основаниями 18 и 13 и боковыми сторонами 3 и 4;

б) с основаниями 16 и 44 и боковыми сторонами 17 и 25.

3.164. В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$, $AB = c$. Найдите площадь треугольника ABC.

3.165. Найдите площадь трапеции:

а) с основаниями 11 и 4 и диагоналями 9 и 12;

б) с основаниями 6 и 3 и диагоналями 7 и 8.

3.166. В равнобокой трапеции основания равны 40 и 24, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

3.167. Площадь треугольника ABC равна S, $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$. Найдите BC.

3.168. Две стороны треугольника равны $2\sqrt{2}$ и 3, площадь треугольника равна 3. Найдите третью сторону.

3.169. Медианы AN и BM треугольника ABC равны 6 и 9 соответственно и пересекаются в точке K, причем угол AKB равен 30°. Найдите площадь треугольника ABC.

3.170. Расстояния от точки M, лежащей внутри треугольника ABC, до его сторон AC и BC соответственно равны 2 и 4. Найдите расстояние от точки M до прямой AB, если $AB = 10$, $BC = 17$, $AC = 21$.

3.171. В треугольник вписана окружность радиуса 4. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на части, равные 6 и 8. Найдите две другие стороны треугольника.

3.172. Вершины треугольника соединены с центром вписанной окружности. Проведенными отрезками треугольник разделился на три части, площади которых: 28, 60 и 80. Найдите стороны треугольника.

Задачи второго уровня

3.173. Основание равнобедренного треугольника равно a, а высота, опущенная на боковую сторону, равна h. Найдите площадь треугольника.

3.174. Углы треугольника равны α, β и γ, а площадь равна S. Найдите высоты треугольника.

3.175. Углы треугольника равны α, β и γ, а площадь равна S. Найдите стороны треугольника.

3.176^0. Точки B_1 и C_1 — основания высот BB_1 и CC_1 треугольника ABC, площадь которого равна S, а угол BAC равен α. Найдите площадь треугольника AB_1C_1.

3.177. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 35 и 14, а биссектриса угла между ними равна 12.

3.178. Диагонали трапеции равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.

3.179. Дан треугольник ABC. Из вершины A проведена медиана AM, а из вершины B — медиана BP. Известно, что $\angle APB = \angle BMA$, $\cos\angle ACB = 0{,}8$ и $BP = 1$. Найдите площадь треугольника ABC.

3.180. В трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, $\angle BAC = \angle CDB$. Продолжения боковых сторон AB и DC пересекаются в точке K, образуя угол AKD, равный 30°. Найдите площадь треугольника AKD, если площадь трапеции равна P.

3.181. В параллелограмме $ABCD$ точка E делит пополам сторону CD, биссектриса угла ABC пересекает в точке O отрезок AE. Найдите площадь четырехугольника $OBCE$, зная, что $AD = a$, $DE = b$, $\angle ABO = \alpha$.

3.182. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Одна из них равна 6. Отрезок, соединяющий середины оснований, равен 4,5. Найдите площадь трапеции.

3.183. Около окружности радиуса R описан параллелограмм. Площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности и параллелограмма равна S. Найдите стороны параллелограмма.

3.184. В треугольнике ABC известно, что $AB = 6$, $BC = 4$, $AC = 8$. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D.

Через точки A, D и C проведена окружность, пересекающая сторону BC в точке E. Найдите площадь треугольника ADE.

3.185. В параллелограмме $ABCD$ острый угол BAD равен α. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры окружностей, описанных около треугольников DAB, DAC, DBC, ABC соответственно. Найдите отношение площади четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$ к площади параллелограмма $ABCD$.

3.186. В четырехугольнике $ABCD$ острый угол между диагоналями равен α. Через каждую вершину проведена прямая, перпендикулярная диагонали, не содержащей эту вершину. Найдите отношение площади четырехугольника, ограниченного этими прямыми, к площади четырехугольника $ABCD$.

3.187. Из точки P, расположенной внутри остроугольного треугольника ABC, опущены перпендикуляры на его стороны. Длины сторон и опущенных на них перпендикуляров соответственно равны a и k, b и m, c и n. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.

3.188. Периметр выпуклого четырехугольника равен 4. Докажите, что его площадь не превосходит 1.

3.189. Стороны треугольника не превосходят 1. Докажите, что его площадь не превосходит $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

3.190. Около треугольника ABC описана окружность. Медиана AD продолжена до пересечения с этой окружностью в точке E. Известно, что $AB + AD = DE$, $\angle BAD = 60^\circ$, $AE = 6$. Найдите площадь треугольника ABC.

3.191. Докажите, что в треугольнике ABC:

а) $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$, где r — радиус вписанной окружности, а r_a, r_b и r_c — радиусы вневписанных окружностей треугольника;

б) $S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$, где S — площадь треугольника.

3.192. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN, O — центр описанной около треугольника ABC окружности. Известно, что $\angle ABC = \beta$, а площадь четырехугольника $NOMB$ равна S. Найдите AC.

3.193. Две окружности пересекаются в точках A и K. Их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AK. Точки B и C лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AB, касается одной окружности в точке A. Прямая, содержащая отрезок AC, касается другой окружности также в точке A. Известно, что $BK = 1$, $CK = 4$, $\operatorname{tg} \angle CAB = \frac{1}{\sqrt{15}}$. Найдите площадь треугольника ABC.

3.194. В остроугольном треугольнике ABC с углом C, равным 30°, высоты пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника AMB, если расстояния от центра окружности, описанной около треугольника ABC, до сторон BC и AC соответственно равны $\sqrt{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3.195. На отрезке AB лежат точки C и D, причем точка C — между точками A и D. Точка M взята так, что прямые AM и MD перпендикулярны и прямые CM и MB тоже перпендикулярны. Найдите площадь треугольника AMB, если известно, что $\angle CMD = \alpha$, а площадь треугольников AMD и CMB равны S_1 и S_2 соответственно.

3.196. (*Формула Брахмагупты.*) Докажите, что если стороны вписанного четырехугольника равны a, b, c и d, то его площадь S может быть вычислена по формуле:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ — полупериметр четырехугольника.

3.197. Окружность, вписанная в треугольник, точкой касания делит одну из сторон на отрезки, равные 3 и 4, а противолежащий этой стороне угол равен 120°. Найдите площадь треугольника.

3.198. Площадь треугольника ABC равна $15\sqrt{3}$. Угол BAC равен 120°. Угол ABC больше угла ACB. Расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, равно 2. Найдите медиану треугольника ABC, проведенную из вершины B.

3.199. В окружность радиуса 7 вписан четырехугольник $ABCD$. Известно, что $AB = BC$, площадь треугольника BCD в два раза меньше площади треугольника ABD, $\angle ADC = 120^\circ$. Найдите все стороны четырехугольника $ABCD$.

3.200. На прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 12, взяты точки A и B так, что $OA = 15$, $AB = 5$ и A лежит между O и B. Из точек A и B проведены касательные к окружности, точки касания которых лежат по одну сторону от прямой OB. Найдите площадь треугольника ABC, где C — точка пересечения этих касательных.

3.201. Точки K, L, M, N и P расположены последовательно на окружности радиуса $2\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника KLM, если $LM \parallel KN$, $KM \parallel NP$, $MN \parallel LP$, а угол LOM равен 45°, где O — точка пересечения хорд LN и MP.

3.202. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C, углом B, равным 30°, и катетом $CA = 1$ проведена медиана CD. Кроме того, из точки D под углом 15° к гипотенузе проведена прямая, пересекающая отрезок BC в точке F. Найдите площадь треугольника CDF.

3.203. Окружность радиуса 3 проходит через вершину B, середины сторон AB и BC, а также касается стороны AC треугольника ABC. Угол BAC острый, и $\sin\angle BAC = \frac{1}{3}$. Найдите площадь треугольника ABC.

3.204. Остроугольный равнобедренный треугольник и трапеция вписаны в окружность. Одно основание трапеции является диаметром окружности, а боковые стороны параллельны боковым сторонам треугольника. Докажите, что трапеция и треугольник равновелики.

Задачи третьего уровня

3.205. Внутри правильного треугольника имеется точка, удаленная от его вершин на расстояния 5, 6 и 7. Найдите площадь треугольника.

3.206. Стороны четырехугольника равны a, b, c и d. Известно, что в этот четырехугольник можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Докажите, что его площадь равна $\sqrt{abcd}$.

3.207. Пусть a, b, c, d — последовательные стороны четырехугольника. Докажите, что если S — его площадь, то $S \leqslant \frac{1}{2}(ac+bd)$, причем равенство имеет место только для вписанного четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны.

3.208. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника $ABCDE$ отсекает от него треугольник единичной площади. Вычислите площадь пятиугольника $ABCDE$.

3.209. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D. Окружности, вписанные в треугольники ABD и BCD, касаются стороны AC в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 3$, $MD = 2$, $DN = 2$, $NC = 4$. Найдите стороны треугольника ABC.

3.210. На отрезке AC взята точка B и на отрезках AB, BC и AC построены как на диаметрах полуокружности S_1, S_2 и S по одну сторону от AC. Найдите радиус окружности, касающейся всех трех полуокружностей, если известно, что ее центр удален от прямой AC на расстояние a.

3.211. Докажите, что точка пересечения диагоналей описанного вокруг окружности четырехугольника совпадает с точкой пересечения диагоналей четырехугольника, вершинами которого служат точки касания сторон первого четырехугольника с окружностью.

Список литературы

1. *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Ч. 1. Планиметрия. — М.: ГУПИ, 1936.
2. *Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И.* Геометрия 8–9. — М.: Просвещение, 1991.
3. *Атанасян Л. С. и др.* Геометрия. Учебник для 7–9 классов общеобразовательных учреждений. — М.: Просвещение, 1995.
4. *Барыбин К. С.* Сборник задач по геометрии. Планиметрия. — М.: Учпедгиз, 1958.
5. *Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л.* Прямые и кривые. — М.: Наука, 1978.
6. *Гальперин Г. А., Толпыго А. К.* Московские математические олимпиады. — М.: Просвещение, 1986.
7. *Гусев В. А., Орлов Ф. И., Розенталь Ф. Л.* Внеклассная работа по математике в 6–8 классах. — М.: Просвещение, 1977.
8. *Делоне Б., Житомирский О.* Задачник по геометрии. — М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.
9. *Зетель С. И.* Новая геометрия треугольника. — М.: Учпедгиз, 1962.
10. *Зубелевич Г. И.* Сборник задач московских математических олимпиад. — М.: Просвещение, 1971.
11. *Коксетер Г. С., Грейтцер С. Л.* Новые встречи с геометрией. — М.: Наука, 1978.
12. *Куланин Е. Д., Федин С. Н.* Геометрия треугольника в задачах. Мин. нар. образования РСФСР. НИИ школ. — М., 1990.
13. *Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К.* Задачи вступительных экзаменов по математике. — М.: Наука, 1986.
14. *Петерсен Ю.* Методы и теории для решения геометрических задач на построение. — М.: 1892.
15. *Погорелов А. В.* Геометрия 7–11. — М.: Просвещение, 1996.

16. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. Ч. I. — М.: Наука, 1991.
17. *Пржевальский Е.* Собрание геометрических теорем и задач. — М., 1909.
18. *Рыбкин Н.* Сборник задач по геометрии для 6–9 классов средней школы. Ч. I. Планиметрия. — М.: Просвещение, 1964.
19. *Саранцев Г. И.* Сборник задач на геометрические преобразования. — М.: Просвещение, 1981.
20. Сборник задач по математике для поступающих во втузы. Под ред. Сканави М. И. — М.: Высшая школа, 1988.
21. Факультативный курс по математике / Сост. Никольская И. Л. — М.: Просвещение, 1991.
22. *Фомин Д. В.* Санкт-Петербургские математические олимпиады. — СПб.: Политехника, 1994.
23. *Шарыгин И. Ф.* Задачи по геометрии. Планиметрия. — М.: Наука, 1986.
24. *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы планиметрии. — М.: Наука, 1967.
25. *Яковлев Г. Н., Купцов Л. П., Резниченко С. В., Гусятников П. Б.* Всероссийские математические олимпиады. — М.: Просвещение, 1992.

Оглавление